Løsning B.1

Fra adiabatisk gassligning:

$$\rho = \rho_0 (\frac{p}{p_0})^{1/\kappa} \ , \qquad p_0, \ \rho_0 \ \text{gitt ved havoverflaten}$$

a) Integrer hydrostatikkens grunnligning. La z være høydekoordinat:

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dz} &= -\rho g \\
\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p^{1/\kappa}} &= -\frac{\rho_0 g}{p_0^{1/\kappa}} \int_{z_0}^{z} dz \\
\frac{1}{1-1/\kappa}(p^{1-1/\kappa} - p_0^{1-1/\kappa}) &= -\frac{\rho_0 g}{p_0^{1/\kappa}}(z - z_0) \\
&= \\
\frac{p}{p_0} &= \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa}\frac{\rho_0 g}{p_0}(z - z_0)\right)^{\kappa/(\kappa-1)} \\
&= \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa}\frac{gM}{R_0 T_0}(z - z_0)\right)^{\kappa/(\kappa-1)}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
p_{6000} &= p_0 \left(1 - 0.286 \frac{9.81 \cdot 1.225}{101325} 6000\right)^{1/0.286} \\
&= 0.797^{1/.286} p_0 \\
&= 0.45 p_0
\end{aligned}$$

Løsning B.2

Temperatur i 30 000 fots høyde:
$T \approx T_0 - Bz = (15 - 0.00650 \cdot 9144)\ ^{\text{o}}\text{C} =$ $-44.3\ ^{\text{o}}\text{C}$

Anta ideell gass og ingen dekkvolumforandring. Trykket i hjulet i 30 000 fots høyde er gitt ved[1]

$$\frac{pv}{T} = \frac{p_0 v_0}{T_0} \ \Rightarrow$$

$p = \frac{273.16 - 44.3}{273.16 + 15.0}[101.325 + (60/14.696) \cdot 101.325]\ \text{kPa} \ =$ $408.97\ \text{kPa}$

Gaugetrykket i hjulet finnes når *aktuelt* omgivende trykk (ikke standardatmosfæretrykket!) subtraheres.[2] Integrer fluidstatikkens grunnligning med ligningen for standardatmosfære innsatt, og finn (se læreboka):

$$\begin{aligned}
p_{\text{atm,9144}} &= p_0 \left(\frac{1 - Bz/T_0}{1 - Bz_0/T_0}\right)^{gM/R_0 B} \qquad (z_0 = 0) \\
&= 101.325 \left(1 - \frac{0.0065 \cdot 9144}{288.16}\right)^{5.26} \ \text{kPa} \\
&= 30.12\ \text{kPa}
\end{aligned}$$

$p_{\text{gauge,9144}} = p - p_{\text{atm,9144}} \approx$ $379\ \text{kPa}$

[1] I gasslikningen brukes selvsagt *absolutt* temperatur og trykk.

[2] For petroleumsingeniører som skal beregne lavtrykks gasstransport i distribusjonsnett, er dette et særlig aktuelt poeng. Der kan heller ikke atmosfæretrykket approksimeres med en konstant, og man kan få betydelige utslag ved noen få meters høydedifferanse.

Løsning B.3

Det er ikke spesifisert om gauge- eller absolutt trykk er oppgitt. Men vi ser at det spiller ingen rolle hvis vi kan anta at atmosfæretrykkforandringen over høydedifferansen er neglisjerbar, fordi bare trykkdifferansen da vil opptre.

$$\begin{aligned} p_2 - p_1 &= -\rho g(z_2 - z_1) \\ s &= \frac{\rho}{\rho_{\text{vann}}} \\ &= -\frac{1}{\rho_{\text{vann}} g} \frac{p_2 - p_1}{z_2 - z_1} \end{aligned}$$

Med oppgitte tallverdier: $s = -\frac{1}{998 \cdot 9.81} \frac{(57.4 - 80.0) \cdot 10^3}{8.0 - 5.0} =$ 0.77

Løsning B.4

La p_A bety absolutt trykk ved A *før* trykkfordoblingen, dvs. trykket etterpå blir $2p_A$. La videre Δh bety manometeravlesning (Hg-nivådifferanse) og ΔH den vertikale avstanden fra venstre kvikksølvsøylenivå til sentrum i røret, og la subskript 1 og 2 angi verdiene henholdsvis før og etter trykkfordoblingen. Fluidstatikkens grunnligning gir følgende to uttrykk for gaugetrykket ved A, henholdsvis før og etter trykkfordoblingen (forutsatt at kvikksølvet står høyest i høyre gren):

$$\begin{aligned} p_A - p_{\text{atm}} &= \rho_{\text{Hg}} g \Delta h_1 - \rho_{\text{vann}} g \Delta H_1 \\ 2p_A - p_{\text{atm}} &= \rho_{\text{Hg}} g \Delta h_2 - \rho_{\text{vann}} g \Delta H_2 \end{aligned}$$

Under forutsetning av at manometerrørets tverrsnitt er det samme overalt, må kvikksølvet synke like mye i den ene grenen som det stiger i den andre. Med x for denne nivåforskyvningen:

$$\begin{aligned} \Delta H_2 &= \Delta H_1 + x \\ \Delta h_2 &= \Delta h_1 + 2x \end{aligned}$$

Eliminer p_A og løs for x:

$$\begin{aligned} -p_{\text{atm}} &= \rho_{\text{Hg}} g(2\Delta h_1 - \Delta h_2) - \rho_{\text{vann}} g(2\Delta H_1 - \Delta H_2) \\ &= \rho_{\text{Hg}} g(\Delta h_1 - 2x) - \rho_{\text{vann}} g(\Delta H_1 - x) \\ -\frac{p_{\text{atm}}}{\rho_{\text{vann}} g} &= x(1 - 2s_{\text{Hg}}) + (s_{\text{Hg}} \Delta h_1 - \Delta H_1) \\ x &= \frac{p_{\text{atm}}/\rho_{\text{vann}} g + s_{\text{Hg}} \Delta h_1 - \Delta H_1}{2s_{\text{Hg}} - 1} \end{aligned}$$

Med normalatmosfæretrykket innsatt, gir det den nye manometeravlesningen:

$\Delta h_2 = (0.1 + 2\frac{10.35 + 1.36 - 5.0}{26.12})$ m $=$ 0.616 m

Også verdien av p_A kan finnes ut fra de oppgitte størrelsene. Men som vi ser er det ikke nødvendig å finne den eksplisitt for å beregne den nye manometeravlesningen.

Løsning B.5

Poenget her er at vi kan ikke neglisjere damptrykket for bensenen, slik vi ofte kan for vann og kvikksølv. Fluidstatikkens grunnligning på integrert form gir:

$$p_{\text{g,A}} + (p_{\text{atm}})_0 = s_{\text{bensen}}\rho_{\text{vann}} g x + p_{v,\text{bensen}} \qquad \text{(øvre gren)}$$

$$p_{\text{g,A}} + (p_{\text{atm}})_0 + s_{\text{bensen}}\rho_{\text{vann}} g (y + \Delta y) = s_{\text{Hg}}\rho_{\text{vann}} g \Delta y + \text{"0"} \qquad \text{(nedre gren)}$$

Løst og innsatt:

$$x = \frac{p_{\text{g,A}} + (p_{\text{atm}})_0 - p_{v,\text{bensen}}}{s_{\text{bensen}}\rho_{\text{vann}} g} = \frac{34460 + 101325 - 10000}{0.88 \cdot 998 \cdot 9.80665}\ \text{m} = \qquad 14.60\ \text{m}$$

$$y = \frac{s_{\text{Hg}} - s_{\text{bensen}}}{s_{\text{bensen}}}\Delta y - \frac{p_{\text{g,A}} + (p_{\text{atm}})_0}{s_{\text{bensen}}\rho_{\text{vann}} g}$$
$$= \left(\frac{13.56 - 0.88}{0.88} 1.22 - \frac{34460 + 101325}{0.88 \cdot 998 \cdot 9.80665}\right)\ \text{m} = (17.58 - 15.77)\ \text{m} = \qquad 1.81\ \text{m}$$

Løsning B.6

Flatesenteret for den rektangulære flaten ligger i den spesifiserte rotasjonsaksen, slik at dette punktet alltid får samme dybde h under rotasjonen. Størrelsen av trykkraften blir derfor den samme for alle vinkler:

$$F = \rho g h a b = (998 \cdot 9.80665 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6)\ \text{N} = \qquad 1174\ \text{kN}$$

Ta ligningen som gir y_p, sett inn rektangel-verdier for I_c og A, sammen med relasjonen mellom y_c og h_c, hvor θ er skråvinkelen i forhold til horisontalen:

$$y_p - y_c = \frac{1}{12}\frac{b^2}{y_c}$$
$$h_c = y_c \sin\theta \qquad (h_c = h)$$

Det gir

$$y_p - y_c = \frac{1}{12}\frac{b^2}{h}\sin\theta = 0.75\ \text{m} \cdot \sin\theta$$

og altså

$\theta = 90^{\text{o}} \Rightarrow \qquad y_p - y_c = \qquad 0.75\ \text{m}$
$\theta = 45^{\text{o}} \Rightarrow \qquad y_p - y_c = \qquad 0.53\ \text{m}$
$\theta = 0^{\text{o}} \Rightarrow \qquad y_p - y_c = \qquad 0\ \text{m}$

Løsning B.7

$$F_1 = \rho g h_{c1} A_1 = 0.82 \cdot 998 \cdot 9.80665 \cdot 2.25 \cdot 3 \cdot 2.5\ \text{N} = \qquad 135.4\ \text{kN}$$

$$F_2 = \rho g h_{c2} A_2 = 0.82 \cdot 998 \cdot 9.80665 \cdot 5.25 \cdot 3.5 \cdot 5\ \text{N} = \qquad 737.3\ \text{kN}$$

Total trykkraft på en side: $F_T = F_1 + F_2 = (135.4 + 737.3)\ \text{kN} =$ 872.7 kN

$$h_{p1} = h_{c1} + \frac{1}{12}\frac{h_1^2}{h_{c1}} = \left(2.25 + \frac{1}{12}\frac{(2.5)^2}{2.25}\right)\ \text{m} = \qquad 2.48\ \text{m}$$

$$h_{p2} = h_{c2} + \frac{1}{12}\frac{h_2^2}{h_{c2}} = \left(5.25 + \frac{1}{12}\frac{(3.5)^2}{5.25}\right)\ \text{m} = \qquad 5.44\ \text{m}$$

Trykksenterplassering for kraftresultanten er bestemt ved sum av momenter, henholdsvis om en linje i overflaten og om en vertikal linje i platens venstre kant:

$$\begin{aligned} h_{pT}F_T &= h_{p1}F_1 + h_{p2}F_2 \\ x_{pT}F_T &= x_1F_1 + x_2F_2 \end{aligned}$$

$h_{pT} = \dfrac{2.48\cdot 135.4 + 5.44\cdot 737.3}{872.7}$ m $=$ 4.98 m

$x_{pT} = \dfrac{1.5\cdot 135.4 + 2.5\cdot 737.3}{872.7}$ m $=$ 2.34 m

Løsning B.8

Flatesenteravstand fra overflaten: $h_c = H - h'_c = (8 - \frac{4\cdot 3}{3\pi})$ m $=$ 6.727 m

Dybde videre til trykksenter: $h_p - h_c = \dfrac{(\dfrac{1}{4} - \dfrac{16}{9\pi^2})}{(1 - \dfrac{4R}{3\pi H})}\dfrac{R^2}{H} =$ 0.09349 m

Trykksenteravstand fra bunnen: $h'_c - (h_p - h_c) =$ 1.180 m

Kraftresultant F_g (gauge): $F_g = \rho_{\text{vann}} g h_c A = \frac{\pi}{2}\rho_{\text{vann}} g R^2 H(1 - \dfrac{4R}{3\pi H}) =$ 930.7 kN

P, horisontal kraft ved punkt A, finnes ved momentbalanse:

$$P\cdot R \;=\; F_g(h'_c - (h_p - h_c)) \;=\; F_g(h'_c - \frac{I_c}{h_c A})$$

$$\begin{aligned} P &= \tfrac{\pi}{2}\rho_{\text{vann}} g R(h_c h'_c - \frac{I_c}{A}) \\ &= \tfrac{\pi}{2}\rho_{\text{vann}} g R H h'_c(1 - \frac{h'_c}{H} - \frac{I_c}{H h'_c A}) \\ &= \tfrac{2}{3}\rho_{\text{vann}} g R^2 H\left(1 - \frac{4R}{3\pi H} - (\tfrac{3\pi}{16} - \tfrac{4}{3\pi})\frac{R}{H}\right) \\ &= \tfrac{2}{3}\rho_{\text{vann}} g R^2 H\left(1 - \frac{3\pi}{16}\frac{R}{H}\right) \;=\; \tfrac{2}{3}998\cdot 9.80665(3)^2 8\left(1 - \frac{3\pi}{16}\frac{3}{8}\right)\text{ N } = \end{aligned}$$ 366.0 kN

Løsning B.9

Benevnelser:

$$\begin{aligned} K &= \text{netto kraft mot flaskebunnen (= kraft fra bunn mot champagne)} \\ H &= \text{høyde fra nedre bunnkant til trykkmåler} \\ W &= \text{tyngde av champagnen nedenfor målernivået} \\ F &= \text{kraft mot champagnen i målernivået} \end{aligned}$$

Sløyf algebraiske fortegn og sett alle størrelsene positive. Ved å bruke gaugetrykk kan man se bort fra trykket utenfra mot flaskebunnen. Vertikal statisk likevekt for champagnen under målernivået gir:

$$F + W - K = 0$$

$$\begin{aligned} K &= F + W \\ &= \pi r^2\left(s_{\text{Hg}}\rho_{\text{vann}} g h - s_{\text{ch}}\rho_{\text{vann}} g\tilde{h}\right) + \left(\pi r^2 H - \frac{2}{3}\pi r^3\right) s_{\text{ch}}\rho_{\text{vann}} g \\ &= \pi r^2\rho_{\text{vann}} g\left(s_{\text{Hg}} h + s_{\text{ch}}(H - \tilde{h} - \frac{2}{3}r)\right) \\ &= \pi(0.05)^2 998\cdot 9.80665\left(13.56\cdot 0.10 + 0.96(0.15 - 0.05 - \frac{2}{3}0.05)\right)\text{ N } = \end{aligned}$$ 109.4 N

Løsning B.10

Dette er et tilfelle hvor Arkimedes' lov ikke kan brukes, fordi det ikke er samme type fluid hele veien rundt legemet. Kraftsummen må beregnes eksplisitt.

Ved likevekt:

$$F + F_{\text{sjø}} - F_{\text{vann}} - F_{\text{W}} = 0$$

$$\begin{aligned}
F &= -F_{\text{sjø}} + F_{\text{vann}} + F_{\text{W}} \\
&= -s_{\text{sjø}}\rho_{\text{vann}} g \frac{\pi}{4} D^2 (H + h - \Delta H) + \rho_{\text{vann}} g \frac{\pi}{4} D^2 H + s_{\text{betong}} \rho_{\text{vann}} g \frac{\pi}{4} D^2 h \\
&= \frac{\pi}{4} D^2 \rho_{\text{vann}} g h \left\{ -s_{\text{sjø}} \left(1 + \frac{H - \Delta H}{h} \right) + \frac{H}{h} + s_{\text{betong}} \right\} \\
&= \frac{\pi}{4} (0.6)^2 998 \cdot 9.80665 \cdot 0.3 \left\{ -1.025 \left(1 + \frac{3.0 - 1.5}{0.3} \right) + \frac{3.0}{0.3} + 2.411 \right\} \text{ N} \\
&= 0.8302 \cdot (3.85 + 2.411) \text{ kN } = \qquad 5.20 \text{ kN}
\end{aligned}$$

Kommentar:
Vi tillot oss den pussige formen på sluttuttrykket fordi den viser sammenhengen med resultatet fra Arkimedes' lov. Uttrykket foran parentesen er det som Arkimedes' lov ville gitt om lokket var omgitt av ferskvann hele veien rundt, og innholdet av parentesen reduserer seg til $(s_{\text{betong}} - 1)$ dersom $s_{\text{sjø}} = 1$ og $\Delta H = 0$.

Løsning B.11

a)
Beregn vekten av en tilsvarende kule med spesifikk tetthet lik 1:

$$W_{\text{vann}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{\text{vann}} g = \frac{4}{3}\pi (0.6)^3 998 \cdot 9.80665 \text{ N } = \qquad 8.855 \text{kN}$$

Det viser at:

$$\begin{aligned}
W_1 &< W_{\text{vann}} \\
W_2 &> W_{\text{vann}} \\
W_1 + W_2 &< 2W_{\text{vann}}
\end{aligned}$$

Systemet av de to sammenbundne kulene vil tilsammen få en oppdrift større enn totalvekten. Den letteste vil flyte i overflaten, mens den tyngste vil henge rett under den i tauet og være helt neddykket.

b)
La O_1 og O_2 betegne oppdriftene på henholdsvis øverste og nederste kule. Vertikal likevekt for nederste kule gir:

$$O_2 + T - W_2 = 0 \qquad (O_2 = W_{\text{vann}})$$

$$T = W_2 - W_{\text{vann}} = (12.0 - 8.855) \text{ kN } = \qquad 3.15 \text{ kN}$$

c)
For et "masseløst" tau er taustrekket det samme på øverste og nederste kule. Vertikal likevekt for øverste kule gir:

$$O_1 - T - W_1 = 0 \qquad (O_1 = (1 - x) W_{\text{vann}} = (1 - x) O_2)$$

$$\begin{aligned}
(1 - x) W_{\text{vann}} &= O_1 \\
&= T + W_1 \\
&= W_1 + W_2 - W_{\text{vann}}
\end{aligned}$$

$$x = 2 - \frac{W_1 + W_2}{W_{\text{vann}}}$$

Volumfraksjonen av øvre kule over vannoverflaten:

$$x = 2 - \frac{W_1 + W_2}{W_{\text{vann}}} = 2 - \frac{4 + 12}{8.855} = \qquad 19.3\,\%$$

Løsning B.12

a)
Bruk av Arkimedes' lov forutsetter at det er væske opp til samme nivå på alle sider av det neddykkede legemet. I denne oppgaven mangler vannet over øvre høyre stokkvadrant. O er lik differansen mellom kraft nedenfra og kraft ovenfra, så bruk av Arkimes's lov impliserer at man trekker fra for stor kraft ovenfra i dette tilfellet. Men vi kan beregne O ved å addere til uttrykket fra Arkimedes' lov det som en slik innbilt vannmengde over over øvre høyre kvadrant ville veid:

$$\begin{aligned} O &= \pi R^2 L \rho_{\text{vann}} g + \left(R^2 - \tfrac{1}{4}\pi r^2\right) L \rho_{\text{vann}} g \\ &= \left(\tfrac{3}{4}\pi + 1\right) r^2 L \rho_{\text{vann}} g \\ &= 3.356 (0.25)^2 4 \cdot 998 \cdot 9.80665\,\text{N} = \qquad 8.21\ \text{kN} \end{aligned}$$

b)
Ved stabil likevekt er stokkens vekt lik oppdriften:

$$\pi R^2 L s_{\text{stokk}} g = \left(\frac{3}{4}\pi + 1\right) r^2 L \rho_{\text{vann}} g$$

$$s_{\text{stokk}} = \frac{3}{4} + \frac{1}{\pi} = \qquad 1.068$$

Kommentar:
Det er ikke nødvendigvis enkelt å finne en tømmerstokk med akkurat denne spesifikke tettheten …

Løsning B.13

Man har

$$\begin{aligned} W &= mg \\ K &= m a_x \end{aligned}$$

hvor m er studentmassen. Her har vi vært litt overbærende med algebraisk fortegn siden K strengt tatt ble definert i oppgaveteksten å være reaksjonskraften mot seteryggen, mens den her står for den akselererende kraften i positiv x-retning. Siden $a_z = 0$ (x-aksen er parallell med rullebanen) gir det

$$\tan\theta = -\frac{a_x}{g} = -\frac{K}{W} = -0.1$$

og følgelig $\quad \theta = \qquad -5.71^{\text{o}}$

hvor det negative fortegnet angir en *helning* i positiv x-retning.