**Løsning C.1**

$$
\begin{aligned}
Q &= \frac{\pi}{4}D^2V \\
&= \frac{\pi}{4}(0.1)^2 0.5\ \text{m}^3/\text{s}\ = && 0.00393\ \text{m}^3/\text{s} \\
&= && 3.93\ \text{l/s}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G &= gs\rho_{\text{vann}}Q \\
&= 9.81\cdot 1.26\cdot 998\cdot 0.00393\ \text{N/s}\ = && 0.0484\ \text{kN/s}
\end{aligned}
$$

$$
\dot{m} = G/g = 48.4/9.81\ \text{kg/s}\ = \quad 4.94\ \text{kg/s}
$$

**Løsning C.2**

Omregning til absolutt trykk:

$$
\begin{aligned}
p_{\text{abs}} &= p_{\text{g}} + p_{\text{atm}} \\
&= p_{\text{g}} + (p_{\text{atm}})_0 \\
&= (2987 + 1013.25)\ \text{mbar} \\
&\approx 4000\ \text{mbar}\ = && 4\cdot 10^5\ \text{Pa}
\end{aligned}
$$

Massestrømraten:

$$
\begin{aligned}
\dot{m} &= \rho Q \\
&= \frac{\pi}{4}\rho D^2 V \\
&= \frac{\pi}{4}\,\frac{pM}{ZR_0T}\,D^2V \\
&= \frac{\pi}{4}\,\frac{4\cdot 10^5\cdot 28.964}{0.99\cdot 8314.5\cdot(20+273.15)}(0.25)^2 10\ \text{kg/s}\ = && 2.36\ \text{kg/s}
\end{aligned}
$$

*Kommentar:*
Nøyaktigheten til den oppgitte $Z$-verdien er såpass tvilsom at det kunne egentlig holdt med to gjeldende siffer her.

**Løsning C.3**

a)
Massestrømratene er like hvis strømmen er stasjonær, så siden $G = g\dot{m}$ har vi

$$G_A = G_B$$

b)
Med konstant rørtverrsnitt $A$ og antatt ideell gass vil kontinuitetsligningen

$$\rho_A A_A V_A = \rho_B A_B V_B$$

medføre:

$$
\begin{aligned}
V_B &= \frac{\rho_A}{\rho_B}V_A \\
&= \frac{p_A T_B}{p_B T_A}V_A \\
&= \frac{(2+1.013)\cdot 10^5}{(1.4+1.013)\cdot 10^5}\,\frac{(273.15+32)}{(273.15+21)}4.5\ \text{m/s}\ = && 5.83\ \text{m/s}
\end{aligned}
$$

c)
Volumstrømratene:

$$Q_A = \tfrac{\pi}{4} d^2 V_A = \tfrac{\pi}{4}(0.08)^2 4.50\ \mathrm{m^3/s}\ = \qquad 22.6\ \mathrm{l/s}$$

$$Q_B = \tfrac{\pi}{4} d^2 V_B = \tfrac{\pi}{4}(0.08)^2 5.83\ \mathrm{m^3/s}\ = \qquad 29.3\ \mathrm{l/s}$$

**Løsning C.4**

Massestrømraten:

$$\dot{m} = \frac{\pi}{4}\rho D^2 V$$

Strømhastighetene:

a)

$$V_1 = \frac{4}{\pi}\frac{\dot{m}}{\rho_{\text{vann}} D_1^2} = \frac{4}{\pi}\frac{40}{998\cdot(0.18)^2}\ \mathrm{m/s}\ = \qquad 1.57\ \mathrm{m/s}$$

b)

$$V_2 = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 V_1 = \left(\frac{0.18}{0.05}\right)^2 1.57\ \mathrm{m/s}\ = \qquad 20.4\ \mathrm{m/s}$$

**Løsning C.5**

Kontinuitetsbetingelse:

$$A_1 V_1 = A_2 V_2\ , \qquad A = \frac{\pi}{4} d^2$$

Det gir:

$$V_1 = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 V_2 = \left(\frac{0.15}{0.075}\right)^2 2.5\ \mathrm{m/s}\ = \qquad 10\ \mathrm{m/s}$$

**Løsning C.6**

Kontinuitetsbetingelsen gir:

$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$

$$\begin{aligned} Q_3 &= Q_1 - \tfrac{\pi}{4} D_2^2 V_2 \\ &= \left(0.283 - \tfrac{\pi}{4}(0.2)^2\cdot 2.44\right)\ \mathrm{m^3/s} \\ &= (0.283 - 0.0767)\ \mathrm{m^3/s}\ = \qquad 206\ \mathrm{l/s} \end{aligned}$$

**Løsning C.7**

Antagelsen om radielt rettet strøm, med ren halvkulesymmetri, i avstander 4-6 ganger hulldiameteren, kan være diskutabel. Men hvis vi følger den er angulære komponenter lik 0, og det er ingen vinkelavhengighet:

$$\boldsymbol{u} = v_r(r)\hat{\boldsymbol{e}}_r\ , \qquad \boldsymbol{a} = a_r(r)\hat{\boldsymbol{e}}_r$$

Vi definerer radien positiv innover i tanken, slik at $v_r$ blir eksplisitt negativ mens pr. definisjon $Q > 0$:

$$Q = -2\pi r^2 v_r \qquad \Rightarrow \qquad v_r = -\frac{Q}{2\pi r^2}$$

Den lokalt tidsderiverte bidrar ikke i akselerasjonen, som blir rent konvektiv:

$$\begin{aligned} a_r &= \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \\ &= -\frac{Q}{2\pi r^2} \frac{\partial(-Q/2\pi r^2)}{\partial r} \\ &= \frac{Q}{2\pi r^2}(-2)\frac{Q}{2\pi r^3} \\ &= -2\frac{v_r^2}{r} \end{aligned}$$

Med tallverdier innsatt:

$r = 60$ cm $\quad\Rightarrow\quad$ $v_r = -0.133$ m/s , $\quad a_r = -0.059$ m/s$^2$

$r = 90$ cm $\quad\Rightarrow\quad$ $v_r = -0.059$ m/s , $\quad a_r = -0.0077$ m/s$^2$

**Løsning C.8**

a)
Rent konvektiv akselerasjon siden ingen eksplisitt tidsavhengighet:

$$\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = (u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y})\boldsymbol{u}$$

Øyeblikkelig resultat, siden $v$ og $w$ er konstanter: $\quad a_y = a_z = 0$

Den ikke-forsvinnende komponenten:

$$a_x = (u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y})u = 2a\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(3\frac{a}{b}y\right) = 6\frac{a^2}{b}$$

b)
Hastighet i punktet $(3b, 4b, 0)$:

$$|\boldsymbol{u}| = \sqrt{\left(3\frac{a}{b}4b\right)^2 + (2a)^2} = \sqrt{148}a \approx 12.2a$$

Akselerasjonen er konstant og den samme i alle punkter:

$$\boldsymbol{a} = \left(6\frac{a^2}{b}, 0, 0\right) \quad\Rightarrow\quad |\boldsymbol{a}| = 6\frac{a^2}{b}$$

c)
Strømlinjebildet blir det samme i alle plan parallelle med $xy$-planet. Strømlinjene er gitt ved

$$\frac{dx}{3\frac{a}{b}y} = \frac{dy}{2a}$$

som integrert gir:

$$x = \frac{3}{4b}y^2 + C$$

Dette er parabler omkring $x$-aksen i $xy$-planet med åpning mot positive $x$, med $C$ en gitt konstant for hver strømlinje, og tilsvarende i alle plan parallelle med $xy$-planet. Fortegnene for $u$ og $v$ gir at strømretningen langs linjene er mot lavere $x$-verdier for negative $y$, og mot høyere $x$-verdier for positive $y$.

d)

For et stasjonært hastighetsfelt i en inkompressibel fluid er

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

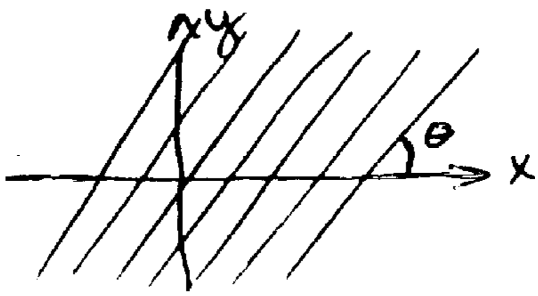
Det oppgitte hastighetsfeltet oppfyller denne relasjonen, så det kan altså i prinsippet beskrive en inkompressibel fluid.

**Løsning C.9**

Det er ingen $z$-avhengighet, så strømlinjebildet blir det samme i alle plan parallelle med $xy$-planet. Integrer strømlinjeligningen:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{V\cos\theta} &= \frac{dy}{V\sin\theta} \\
\frac{dy}{dx} &= \tan\theta \\
y &= \tan\theta\cdot x + C
\end{aligned}$$

I $xy$-planet er dette en skare parallelle linjer med stigningsvinkel $\theta$, en linje for hver $C$-verdi:




**Løsning C.10**

a)
Hastighetsfeltet er ikkestasjonært, så de lokale tidsderiverte bidrar til akselerasjonen:

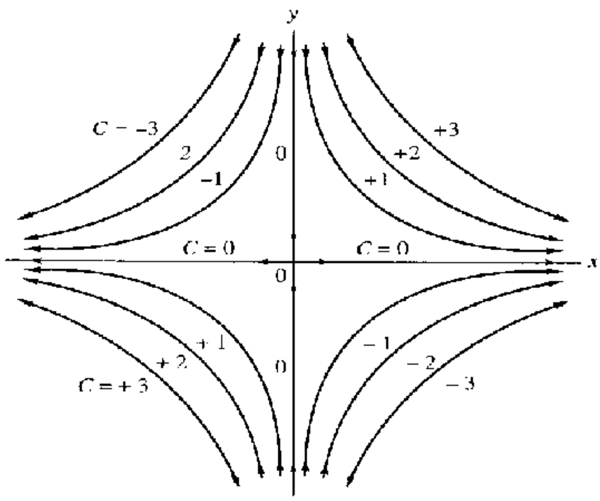
$$\begin{aligned}
\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t} &= Kx\hat{\boldsymbol{i}} - Ky\hat{\boldsymbol{j}} \\
\boldsymbol{u}\cdot\nabla &= Kxt\frac{\partial}{\partial x} - Kyt\frac{\partial}{\partial y} \\
(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)u &= K^2xt^2 \\
(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)v &= K^2yt^2
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = (1+Kt^2)Kx\hat{\boldsymbol{i}} + (-1+Kt^2)Ky\hat{\boldsymbol{j}}$$

b)
Også her får vi samme strømlinjebilde i alle plan paralle med $xy$-planet. Strømlinjene er gitt ved:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{Kxt} &= \frac{dy}{-Kyt} \\ -\ln y &= \ln x + \ln C \qquad (C \text{ konstant}) \\ xy &= C\end{aligned}$$

Strømlinjene er hyperbler. Strømlinjebildet er konstant i tiden og altså det samme for alle verdier av $t$. Hastigheten i hvert punkt øker imidlertid lineært med tiden:




**Løsning C.11**

Fra den generelle strømlinjeligningen:

$$\frac{dx}{x^2 - y^2} = \frac{dy}{-2xy}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2\dfrac{y}{x}}{1 - \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}$$

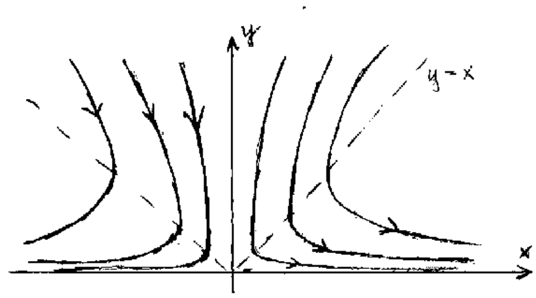
Alle strømlinjene har samme verdi av den deriverte i krysningspunktene med linjen $y = cx$, med $c$ en gitt konstant (som *ikke* er integrasjonskonstanten i strømlinjeligningen). Spesielt er kurvetangenten vertikal for $c = 1$:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{krp}} = \frac{-2c}{1 - c^2}$$

$$\begin{aligned}
c \to 0_+ &\qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{krp}} \to 0_- \\
c \to 1_- &\qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{krp}} \to -\infty \\
c \to 1_+ &\qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{krp}} \to +\infty \\
c \to \infty &\qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{krp}} \to 0_+
\end{aligned}$$

Strømlinjemønsteret må være speilsymmetrisk om $y$-aksen, fordi slik speiling $(y \to y,\ x \to -x)$ medfører at $dy/dx$ skifter fortegn, men ellers ingen forandringer.

Basert på ovenstående overlegninger kan vi tegne følgende skisse:




**Løsning C.12**

a)
Innsatt i strømlinjeligningen, og integrert, med $C$ en konstant:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+2t}\frac{dx}{x} &= \frac{dy}{y} \\ \frac{1}{1+2t}\ln x &= \ln y - \ln C \\ y &= Cx^{1/(1+2t)} \end{aligned}$$

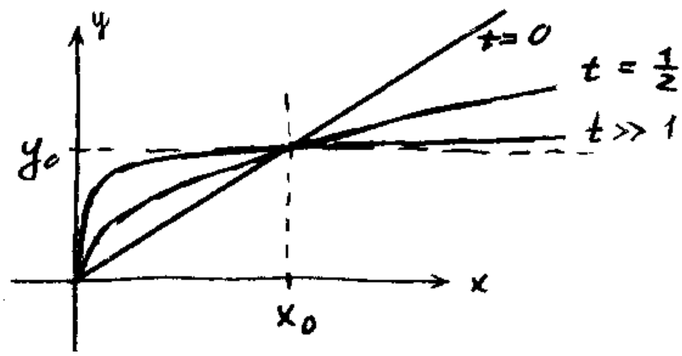
Bestemmelse av integrasjonskonstanten $C$ ved å sette $(x, y) = (x_0, y_0)$ viser at den er tidsavhengig:

$$C = \frac{y_0}{x_0^{1/(1+2t)}}$$

Ligningen for den tidsavhengige strømlinjen gjennom det vilkårlige punktet $(x_0, y_0)$ blir da

$$\frac{y}{y_0} = \left(\frac{x}{x_0}\right)^{\dfrac{1}{1+2t}}$$

Strømlinjebildet er altså *skalainvariant*. Skissert:



b)
Banelinjer på $t$-parameterform finnes ved integrasjon av hastighetskomponentene samt bestemmelse av integrasjonskonstantene $C_x$ og $C_y$:

$$
\begin{array}{rcl}
u = \dfrac{dx}{dt} = x(1+2t) & \Rightarrow & \dfrac{dx}{x} = (1+2t)dt \\
 & & \ln x = t + t^2 + \ln C_x \\
(t=0, x=x_0) & \Rightarrow & x = x_0 e^{t+t^2}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
v = \dfrac{dv}{dt} = y & \Rightarrow & \dfrac{dy}{y} = dt \\
 & & \ln y = t + \ln C_y \\
(t=0, y=y_0) & \Rightarrow & y = y_0 e^t
\end{array}
$$

Grenseverdier og ekstremalegenskaper:

$$
\begin{array}{rccc}
t \to -\infty\ : & \dfrac{x}{x_0} & \to & +\infty \\
 & \dfrac{y}{y_=} & \to & 0_+ \\
t = 0\ : & \dfrac{x}{x_0} & = & 1 \\
 & \dfrac{y}{y_0} & = & 1 \\
t \to \infty\ : & \dfrac{x}{x_0} & \to & +\infty \\
 & \dfrac{y}{y_0} & \to & +\infty
\end{array}
$$

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{x_0}\right) = (1+2t)e^{t+t^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t = -\frac{1}{2}
$$

$$
\begin{array}{rcrcl}
t = -\dfrac{1}{2} & \Rightarrow & \ln\left(\dfrac{x}{x_0}\right)_{\text{ekstr}} & = & -\dfrac{1}{4} \\
 & & \ln\left(\dfrac{y}{y_0}\right)_{\text{ekstr}} & = & -\dfrac{1}{2}
\end{array}
$$

Bli kvitt tidsparameteren ved å eliminere $t$ mellom $x = x(t)$ og $y = y(t)$. Resultatet er

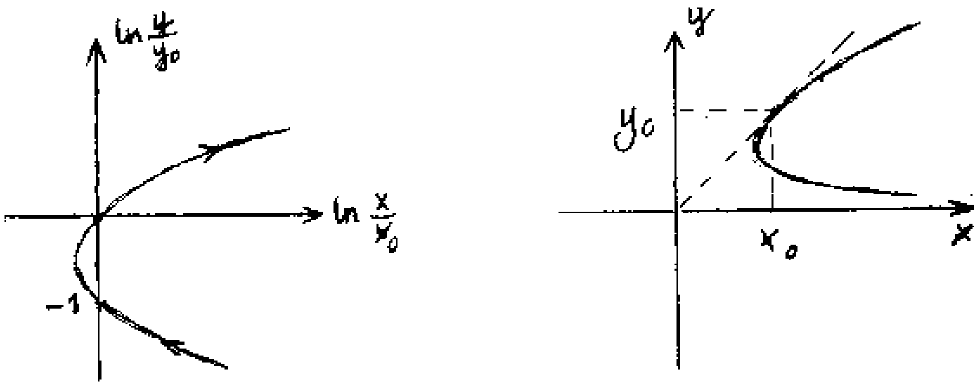
$$
\ln\frac{x}{x_0} = \ln\frac{y}{y_0} + \left(\ln\frac{y}{y_0}\right)^2
$$

eller

$$
\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} e^{\left(\ln\frac{y}{y_0}\right)^2}
$$

I log-log-plott er altså *banelinjen* som går gjennom $(x_0, y_0)$ ved $t = 0$ en parabel, og også i lineært plott en krum kurve. Se figuren på neste side.[1]

[1] Bemerk forskjellen fra tilsvarende *strømlinje* gjennom $(x_0, y_0)$ ved $t = 0$, som i lineært plott er en rett linje!




Til Oppgave C.12b