Løsning E.1

Foreta omskrivninger av den stedsderiverte av et produkt som forekommer i den vanlige formen:

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u}) \\
&= \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \\
&= \frac{\partial\rho}{\partial t} + u\frac{\partial\rho}{\partial x} + v\frac{\partial\rho}{\partial y} + w\frac{\partial\rho}{\partial z} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} + \rho\frac{\partial v}{\partial y} + \rho\frac{\partial w}{\partial z} \\
&= \frac{\partial\rho}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\rho + \rho(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}) \\
&= \frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla\cdot\boldsymbol{u})
\end{aligned}
$$

Dette er den søkte formen.

Løsning E.2

Legg en z-akse i $\boldsymbol{\omega}$s retning, dvs. $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{\boldsymbol{e}}_z$ og $\boldsymbol{\xi} = \xi\hat{\boldsymbol{e}}_z$. Betrakt et infinitesimalt sirkulært flateelement med radius ϵ og areal dA, med vilkårlig beliggenhet i xy-planet. Elementets translasjon ved fluidens rotasjon gir ikke noe bidrag til sirkulasjonen $d\Gamma$ rundt elementets omkrets, så ved beregning av denne sirkulasjonen kan vi flytte elementet så det får sentrum i rotasjonsaksen. Virvlingen er lik sirkulasjonen pr. flateenhet:

$$\xi = (\nabla\times\boldsymbol{u})_z = \frac{d\Gamma}{dA} = \frac{2\pi\epsilon\cdot\epsilon\omega}{\pi\epsilon^2} = 2\omega$$

Virvlingen har altså samme konstante verdi i alle punkter i fluiden. Denne typen rotasjon kalles *tvungen virvel*.

Løsning E.3

a)
Legg inn et plan med rotasjonsaksen som flatenormal. Hvis sirkulasjonen rundt en sirkel i planet med sentrum på rotasjonsaksen er uavhengig av denne sirkelens radius, så vet vi fra Stokes' teorem at virvlingen ξ må oppfylle kravet $\xi = 0$ i dette planet, ihvertfall for $r > 0$. Beregn sirkulasjonen rundt en slik sirkel, med antatt størrelse $2\pi K > 0$:

$$\Gamma = \oint v_t\, dL = f(r)\, 2\pi r = 2\pi K$$

Det gir funksjonsformen til tangensialhastigheten:

$$v_t = \frac{K}{r}$$

Kommentar:
Denne typen rotasjon kalles *fri virvel* eller *virveltråd*, og beskriver en "ideell syklon".

b)
Det forenkler regningene om vi straks legger merke til følgende generelle relasjon, som er lett å vise:

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial}{\partial x}(r^N) = N r^{N-1}\frac{x}{r}$$

Tilsvarende uttrykk gjelder for de y- og z-deriverte. Spesialtilfellet $N = -2$:

$$\frac{\partial}{\partial x}(r^{-2}) = -2\frac{x}{r^4}\ , \qquad \frac{\partial}{\partial y}(r^{-2}) = -2\frac{y}{r^4}$$

Ved innsetting ser vi at kontinuitetskravet er oppfylt:

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\boldsymbol{u} &= -y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{K}{r^2}\right) + x\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{K}{r^2}\right) \\ &= -2K\frac{yx - xy}{r^4} \\ &= 0 \end{aligned}$$

c)
I plane polarkoordinater har vi i vanlig notasjon

$$\frac{x}{r} = \cos\theta\ , \qquad \frac{y}{r} = \sin\theta$$

slik at

$$u = -\frac{K}{r}\cos\theta\ , \qquad v = \frac{K}{r}\sin\theta$$

og videre

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{u}| &= \sqrt{u^2+v^2} = \frac{K}{r} \qquad \text{(uavhengig av polarvinkelen)} \\ \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r} &= ux + vy = 0 \qquad \text{(ingen radiell hastighetskomponent)} \end{aligned}$$

Dermed:

$$v_r = 0\ , \qquad v_t = \frac{K}{r}$$

Hastighetsfeltet er altså ingenting annet enn virveltråden fra a). Fortegnet til v_t stemmer med at for $K > 0$ får vi $v_t > 0$, $u < 0$ og $v > 0$ i første kvadrant.

Løsning E.4

a)

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{q}{2\pi}\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\frac{1}{x} = \frac{q}{2\pi}\frac{x}{r^2} \\ v &= -\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{q}{2\pi}\frac{-1}{1+(\frac{y}{x})^2}\frac{(-y)}{x^2} = \frac{q}{2\pi}\frac{y}{r^2} \end{aligned}$$

Spesialtilfellet $N = -2$ av relasjonen fra forrige oppgave vil være nyttig når virvlingen skal beregnes:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \\ &= \frac{q}{2\pi}\left(y\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r^2} - x\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r^2}\right) \\ &= -2\frac{q}{2\pi}\frac{1}{r^3}(yx - xy) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Et hastighetspotensial ϕ må derfor eksistere. Legg merke til at uttrykkene for hastighetskomponentene har en slik form at uttrykket for potensialet kan finnes direkte:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial x} &= -u = -\frac{q}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}(\ln r)\\ \frac{\partial\phi}{\partial y} &= -v = -\frac{q}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}(\ln r)\end{aligned}\right. \qquad \Rightarrow \qquad \phi = -\frac{q}{2\pi}\ln r$$

Kommentarer:
Nullpunktet for potensialet er lagt ved $r = 1$. For total volumetrisk strømrate utover fra origo gjennom en sirkel med radius r, hvor $v_r = -(\nabla\phi)_r = -\partial\phi/\partial r$, har vi:

$$Q = 2\pi r\left(-\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = 2\pi r\,\frac{q}{2\pi}\frac{1}{r} = q = \text{konstant}$$

Eksistensen av en strømfunksjon (ved kontinuitet) og av et hastighetspotensial er altså gjensidig garantert. Ved direkte utregning kunne vi også funnet:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = -(\nabla\cdot\nabla)\phi = -\nabla^2\phi = -\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right) = 0$$

Laplaceligningen er dermed eksplisitt oppfylt. Se tilsvarende regning under neste punkt.

b)
Noen derivasjoner ved anvendelse av ∇ og ∇^2:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial x} &= \frac{\partial\phi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{q}{4\pi}\frac{x}{r^3}\\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} &= \frac{q}{4\pi}\left(\frac{3x^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right)\end{aligned}$$

Tilsvarende uttrykk finnes for $\partial\phi/\partial y$ og $\partial\phi/\partial z$. Tilsammen gir det

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = \frac{q}{4\pi}\left(\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5} - \frac{3}{r^3}\right) = 0$$

Uttrykket for ϕ oppfyller altså Laplaceligningen. Ved direkte utregninger basert på u, v og w (gjør dem!) kan vi dessuten se at

$$\xi_x = \xi_y = \xi_z = 0$$

samt

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

slik at hastighetsfeltet som følger fra ϕ er både virvlingsfritt og kontinuerlig. Konsistenskravene for at ϕ skal være et hastighetspotensial samt oppfylle Laplaceligningen er dermed oppfylt.

Men hvordan ser strømmen ut? Av symmetrigrunner følger det fra ϕ's form at hastighetsfeltet må være sfærisk symmetrisk, dvs. i alle punkter må $\boldsymbol{u}$ være radielt rettet. Strømmen *utover* gjennom gjennom et kuleskall om origo med vilkårlig radius r blir

$$Q = 4\pi r^2\left(-\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = 4\pi r^2\,\frac{q}{4\pi}\frac{1}{r^2} = q = \text{konstant}$$

Med en positiv verdi for q beskriver derfor ϕ en kilde i origo. En negativ verdi ville gitt en *sluk*, dvs. en innoverrettet strøm.

Løsning E.5

a)
Hastighetene, ved bruk av samme derivasjonsrelasjon som i de to foregående oppgavene:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{y}{r^2} \\ v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{x}{r^2} \end{aligned}$$

Uttrykkenes form medfører at $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{r}$ i alle punkter:

$$ux + vy = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r} = 0\ , \qquad v_r = 0$$

$$v_t = |\boldsymbol{u}| = \sqrt{u^2+v^2} = \frac{\Gamma}{2\pi}\sqrt{\frac{x^2+y^2}{r^4}} = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{r}$$

Dette er ingenting annet enn den frie virvelen fra oppgave E.3, med innebygd oppfyllelse av kontinuitets-ligningen siden ψ er forutsatt å eksistere. Fortegnet til v_t blir riktig, som argumentert for i løsningen av den oppgaven.

b)
Som argumentert for i løsningen av nevnte oppgave må $\boldsymbol{\xi} = 0$ ihvertfall for $r > 0$, men la oss se det eksplisitt:

$$\xi = \frac{\partial u_t}{\partial r} + \frac{u_t}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} = \frac{\Gamma}{2\pi}\left(-\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} + 0\right) = 0$$

Hastighetspotensialet:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{y}{r^2} \qquad \Rightarrow \qquad \phi = \frac{\Gamma}{2\pi} y \int \frac{dx}{x^2+y^2} = \frac{\Gamma}{2\pi}\arctan\frac{x}{y} + f(y)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\left(\frac{x}{-y^2}\right) + f'(y) = -v = -\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{x}{r^2} \qquad \Rightarrow \qquad f'(y) = 0$$

$f(y)$ er derfor y-uavhengig. Med valget $f(y) = 0$:

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi}\arctan\frac{x}{y}$$

Kommentar:
Formene til ψ og ϕ for en fri virvel er “ombyttet” i forhold til dem for en kilde. $\theta =$ konstant ved $\partial/\partial r$-operasjonen medfører $x/y =$ konstant, og dermed $u_r = -\partial\phi/\partial r = 0$ slik det bør være.

Løsning E.6

Man finner hastighetskomponentene

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} = ax \\ v &= -\frac{\partial \phi}{\partial y} = ay \\ w &= -\frac{\partial \phi}{\partial z} = -2az \end{aligned}$$

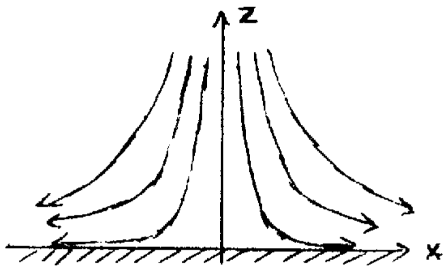
og fra dem at strømmen er kontinuerlig samt (selvsagt) virvlingsfri:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0\ , \qquad \nabla\times\boldsymbol{u} = 0$$

Siden

$$\frac{v}{u} = \frac{y}{x}\ , \qquad \sqrt{u^2+v^2} \propto \sqrt{x^2+y^2}$$

følger det at vi har rotasjonssymmetri omkring z-aksen. Det er derfor tilstrekkelig å studere strømlinjebildet i første og annen kvadrant av xz-planet, som ser noenlunde slik ut for $a > 0$, og som bekrefter påstanden i oppgaveteksten:



Løsning E.7

Ut fra

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = -2\ , \qquad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = -3$$

følger det at

$$\xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0\ , \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0$$

Siden $\xi = 0$ har vi med en potensialstrøm å gjøre. Siden kontinuitet er (selvsagt) oppfylt blir div grad$\phi = 0$, og i kartesiske koordinater gir det nettopp Laplaceligningen.

Løsning E.8

Kontinuitetsligningen er oppfylt:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = \frac{\partial}{\partial x}(2y) + \frac{\partial}{\partial y}(3x) = 0$$

Strømfunksjon:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = u = 2y \qquad \Rightarrow \qquad \psi(x,y) = y^2 + f(x)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 + f'(x) = -v = -3x \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = -3x$$

Med C en konstant:

$$f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + C$$

Konstanten kan fastlegges ut fra konvensjonen at $\psi = 0$ på en strømlinje gjennom origo, siden ψ for en gitt strømlinje er strømraten mellom denne og origo. Det gir:

$$\psi(x,y) = y^2 - \frac{3}{2}x^2$$

Løsning E.9

a)
Hastighetskomponenter:

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = -2Ky \\
v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -2Kx
\end{aligned}
$$

For konstant $\psi = \psi_0$:

$$y = \pm\sqrt{\frac{\psi_0}{K} + x^2}$$

Strømlinjer:

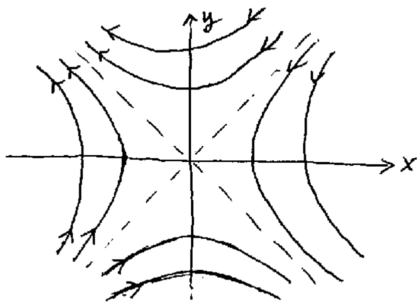
$$\frac{\psi_0}{K} < 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{Hyperbler som krysser } x\text{-aksen}$$

$$\frac{\psi_0}{K} > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{Hyperbler som krysser } y\text{-aksen}$$

Origo er et stagnasjonspunkt, for der er $u = v = 0$.

Hele kurveskaren kan framkomme for gitt K, ved bare å variere ψ_0, inklusive fortegnet. Men *pilretningene* avhenger av K's fortegn.

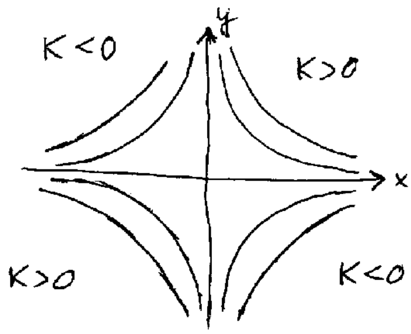
Skisse:



b)
Man bør først sjekke at ϕ selvfølgelig gir de samme hastighetskomponentene som ψ (gjør det!). Potensiallinjene blir hyperbler som i alle punkter krysser perpendikulært kurvene fra a). For konstant $\phi = \phi_0$:

$$y = \frac{\phi_0}{2K}\frac{1}{x}$$

Skisse:



c)
Strømlinjebildet kan, kvalitativt sett, forestille 2 motsatt rettede strømmer av en ideell væske. De treffes i området omkring origo og bøyer av til sidene. Alternativt kan man interpretere det som potensialstrøm i et rettvinklet hjørne, for hvert av de 4 hjørnene som dannes av de strekede linjene med stigningstall ± 1.

Løsning E.10

a)
Kontinuitetsligningen er oppfylt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -2K + 2K = 0$$

Virvlingsfrihet er oppfylt:

$$\xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 - 0 = 0$$

Når et hastighetsfelt er virvlingsfritt kan det skrives som $\boldsymbol{u} = -\nabla\phi$. Når kontinuitetsligningen samtidig er oppfylt har vi

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = (\nabla\cdot\nabla)\phi = \nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$$

Altså er Laplaceligningen oppfylt.

Hvis K skifter fortegn men ikke absoluttverdi, vil pilene på strømlinjene skifte retning, men strømbildet forandrer seg ikke på annen måte.

b)
Definisjonsmessig:

$$\begin{aligned} u &= -2Kx = \frac{\partial\psi}{\partial y} \\ -v &= -2Ky = \frac{\partial\psi}{\partial x} \end{aligned}$$

Integrer den første og sett inn i den andre:

$$\psi = -2Kxy + f(x)$$

$$-2Ky + f'(x) = -2Ky$$

$$\Rightarrow \qquad f(x) = C = \text{konstant}$$

Med konvensjonen om at verdien av ψ på en strømlinje skal representere strømraten mellom vedkommende strømlinje og origo, bestemmer vi $C = 0$:

$$\psi(x, y) = -2Kxy$$

c)
Tilsvarende for ϕ som under b) for ψ:

$$\begin{aligned} u &= -2Kx = -\frac{\partial\phi}{\partial x} \\ v &= 2Ky = -\frac{\partial\phi}{\partial y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi &= Kx^2 + f(y) \\ 0 + f'(y) &= -v = -2Ky \\ f(y) &= -Ky^2 + C \end{aligned}$$

Resultat, selv om den vilkårlige konstanten C ofte settes lik 0:

$$\phi(x,y) = K(x^2 - y^2) + C$$

d)
Enkleste måte er å observere at uttrykkene for ψ og ϕ er de ombyttede versjonene av uttrykkene fra forrige oppgave! Vi kan hente skissene derfra og bytte om navnene, samt gjøre noen ekstra forutsetninger om pil-retninger osv.

kommentar:
Betrakt koordinattransformasjonen $(x,y) \rightarrow (x',y')$, der de merkede aksene fås ved å dreie koordinatsystemet 45 $^{\mathrm{o}}$ i positiv (øvre fortegn) eller negativ (nedre fortegn) retning. Sammenhengen mellom umerkede og merkede koordinater for et vilkårlig punkt i planet er:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x' \mp y') \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm x' + y') \end{aligned}$$

Det gir:

$$\begin{aligned} 2xy &= \pm(x'^2 - y'^2) \\ x^2 - y^2 &= \mp 2x'y' \end{aligned}$$

Dette er bakgrunnen for at strømlinje- og potensialbildene i denne oppgaven er lik de i den forrige, bare dreid 45 $^{\mathrm{o}}$.

Løsning E.11

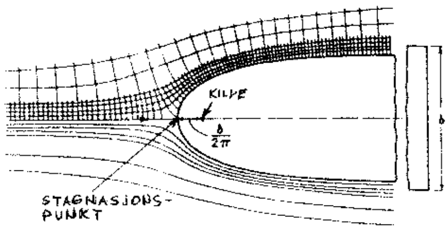
a)
Vi må ha symmetri omkring x-aksen, slik at $v = 0$ på denne aksen. I stagnasjonspunktet, som også må ligge på aksen, blir $u = 0$ og $x = -r$:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \phi_1}{\partial x} - \frac{\partial \phi_2}{\partial x} &= U + S\frac{\partial}{\partial x}\ln r|_{y=0,x=-b/2\pi} \\ &= U + S\frac{\partial}{\partial(-r)}\ln r|_{r=b/2\pi} \\ &= U - \frac{S}{b/2\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Eller:

$$S = \frac{Ub}{2\pi}$$

b)
Vi vet fra før, eller kan i alle fall vise, at ϕ_1 og ϕ_2 samt deres sum beskriver et kontinuerlig hastighetsfelt, slik at en strømfunksjon ψ som tilsvarer $\phi_1 + \phi_2$ må eksistere. På tvers av en gitt strømlinje går det ingen strøm. Hvis vi velger strømlinjen som krysser x-aksen i stagnasjonspunktet, har vi da at den kan interpreteres som omrisset av et “strømlinjeformet legeme” som det strømmer fluid omkring:



c)
Ut fra opplysningene i en tidligere oppgave vet vi:

$$\psi_2 = S \arctan \frac{y}{x}$$

Videre, inklusive betingelsen om at $\psi_1 = 0$ i origo for den homogene rettlinjede strømkomponenten:

$$u = -\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \qquad \Rightarrow \qquad \psi_1 = Uy$$

I stagnasjonspunktet, som har $y = 0$ og $x < 0$:

$$\arctan \frac{y}{x} = \arctan (0_-) = \pi$$

På den positive y-aksen:

$$\arctan \frac{y}{x} = \frac{\pi}{2}$$

I stagnasjonspunktet og i det "strømlinjeformede legemets" øvre skjæringspunkt med x-aksen har vi da henholdsvis:

$$\psi = S\pi = \frac{1}{2}Ub\ , \qquad \psi = Uy + S\frac{\pi}{2} = Uy + \frac{1}{4}Ub$$

De to ψ-verdiene må være like da punktene ligger på samme strømlinje, og det gir verdien av y i omkretsens øvre skjæringspunkt med y-aksen:

$$y = \frac{1}{4}b$$

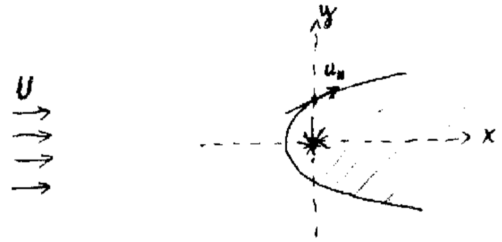
På omkretsen er totalhastigheten lik hastigheten parallelt med omkretsen. Hastighetskomponentene fra hvert delpotensial adderer seg, men ϕ_1 har $v_{(1)} = 0$ og ϕ_2 har $u_{(2)} = 0$ i krysningspunktet. De andre komponentene er:

$$\begin{aligned} u_{(1)} &= -\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = U \\ v_{(2)} &= -\frac{\partial \phi_2}{\partial r}|_{r=y=b/4} = \frac{Ub}{2\pi}\frac{1}{b/4} = \frac{2}{\pi}U \end{aligned}$$

Totalhastigheten ved legemets overflate ved $x = 0$:

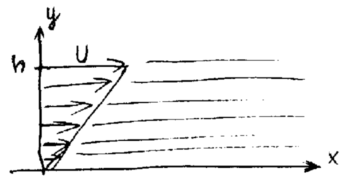
$$u_{\|} = \sqrt{u_{(1)}^2 + v_{(2)}^2} = \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}}\,U \approx 1.185\,U$$

Kommentar:
Glem ikke at dette er en ideell fluidstrøm. For en reell fluid er $u_{\|} = 0$ inne ved et fast legeme.



Løsning E.12

Skisse av strømsituasjonen:



For strømfeltet

$$u = u(y) = \frac{U}{h}y \;, \qquad v = 0$$

er kontinuitetsligningen oppfylt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 + 0 = 0$$

En strømfunksjon eksisterer derfor. Finnes ved integrasjon:

$$u = \frac{U}{h}y = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad \Rightarrow \qquad \psi x, y = \frac{U}{2h}y^2 + f(x)$$

$$-v = 0 = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 - f'(x) \qquad \Rightarrow \qquad f = C = \text{konstant}$$

Strømlinjene blir rette linjer parallelle med x-aksen. Konstanten $C = 0$ ut fra konvensjonen om hva strømfunksjonen representerer:

$$\psi(x, y) = \frac{U}{2h}y^2$$

Man kan tegne rette linjer som overalt står perpendikulært på strømlinjene i figuren, men disse er *ikke* potensiallinjer. Grunnen er at man har en ikke-forsvinnende virvling i alle punkter:

$$\xi_z = \frac{\partial}{\partial x}(0) - \frac{\partial}{\partial y}(\frac{U}{h}y) = -\frac{U}{h} \neq 0$$

Det eksisterer ikke noe hastighetspotensial i dette tilfellet.

Kommentar:
Hvis man likevel prøver seg med en potensialkonstruksjon, siden man formelt kan integrere u og v hver for seg, skjer det følgende:

$$-\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{U}{h}y \qquad \Rightarrow \qquad \phi(x, y) = -\frac{U}{h}xy + f(y)$$

$$-\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 = \frac{U}{h}x - f'(y) \qquad \Rightarrow \qquad f(y) = \frac{U}{h}xy + C$$

Resultatet når det settes inn for f er en selvmotsigelse:

$$\phi(x, y) = C = \text{konstant !}$$