

# E. Grunnleggende hydrodynamikk

## Oppgave E.1

Vis at kontinuitetsligningen på differensiell form kan omskrives til en form som inneholder den substansielt deriverte av tettheten:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0$$

## Oppgave E.2

Et fat med væske settes i rotasjon med jevn vinkelhastighet  $\omega$ . Etter en stund vil væsken rotere med som et "stivt legeme". Bestem virvlingen  $\xi$ .

## Oppgave E.3

a) En væske roterer om en akse, og vi vet at hastigheten er rent tangensiell samt utelukkende en funksjon av avstanden  $r$  fra rotasjonsaksen:

$$v_r = 0, \quad v_t = f(r)$$

Hvordan må funksjonen  $f(r)$  være for at sirkulasjonen skal være virvlingsfri (ihvertfall for  $r \neq 0$ )?

b) Et 2D hastighetsfelt er gitt på kartesisk komponentform, med  $K$  en konstant, som

$$u = -\frac{Ky}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{Kx}{x^2 + y^2}$$

Oppfyller dette hastighetsfeltet kontinuitetsligningen for en inkompressibel fluid?

c) Skriv om hastighetsfeltet  $(u, v)$  under punkt b) til komponentene  $(v_r, v_t)$  for plane polarkoordinater!

## Oppgave E.4

a) For 2D strøm er strømfunksjonen for en kilde i origo gitt ved

$$\psi = \frac{q}{2\pi} \arctan \frac{y}{x}$$

Vis at tilsvarende hastighetspotensial er

$$\phi = -\frac{q}{2\pi} \ln r$$

b) Vis at for 3D ideell og inkompressibel strøm er hastighetspotensialet omkring en punktkilde i origo derimot gitt ved

$$\phi = \frac{q}{2\pi} \frac{1}{r}$$

**Oppgave E.5**

a) Finn hastighetsfeltet i 2D som tilsvarer strømfunksjonen

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$

b) Er strømfeltet virvlingsfritt? Finn i så fall hastighetspotensialet  $\phi$ .

**Oppgave E.6**

Vis at hastighetspotensialet

$$\phi = -\frac{1}{2}a(x^2 + y^2 - 2z^2) \quad (a > 0)$$

kan beskrive en stråle av ideell inkompressibel væske i negativ  $z$ -retning med symmetri omkring  $z$ -aksen, som treffer  $xy$ -planet ovenfra og blir avbøyd til siden.

**Oppgave E.7**

Gitt strømfunksjonen

$$\psi = 3x - 2y$$

Er dette en potensialstrøm? Tilfredsstiller den Laplaced ligningen?

**Oppgave E.8**

En 2D strøm av en ideell inkompressibel fluid har hastighetsfeltet (med vilkårlige enheter)

$$\mathbf{u} = 2y\hat{i} + 3x\hat{j}$$

Er kontinuitetsligningen oppfylt? Finn i så fall strømfunksjonen  $\psi(x, y)$ , og skisser noen få strømlinjer med påsatte retningspiler.

**Oppgave E.9**

Vi har gitt en strøm av en ideell inkompressibel fluid, med strømfunksjon og hastighetspotensial gitt ved

$$\psi = K(x^2 - y^2), \quad \phi = 2Kxy$$

der  $K$  er en konstant.

- Plott strømlinjene i det fulle  $xy$ -planet, og finn eventuelle stagnasjonspunkter.
- Plott noen potensiellinjer.
- Hva slags strømtype kan man eventuelt la strømfeltet representere?

**Oppgave E.10**

Vi har gitt hastighetsfeltet

$$u = -2Kx, \quad v = 2Ky$$

med  $K$  en konstant.

- a) Vis at strømfeltet oppfyller kontinuitetsligningen for en ideell inkompressibel fluid og er virvlingsfritt, samt at det oppfyller Laplanceligningen. Hva skjer hvis man forandrer fortegn på  $K$ ?
- b) Vis ved integrasjon at strømfunksjonen er

$$\psi = -2Kxy$$

- c) Vis ved integrasjon at hastighetspotensialet er

$$\phi = K(x^2 - y^2) + C \quad (C \text{ konstant})$$

- d) På hvilken måte kan du enklest skissere noen strømlinjer og potensiellinjer, ut fra det som ble oppgitt i forrige oppgave?

**Oppgave E.11**

For 2D ideell og inkompressibel strøm i  $xy$ -planet skal vi superponere de to hastighetspotensialene

$$\phi_1 = -Ux, \quad \phi_2 = -S \ln r$$

hvor  $\phi_1$  beskriver en homogen strøm i positiv  $x$ -retning, og  $\phi_2$  beskriver en kilde i origo. Det må da oppstå et *stagnasjonspunkt* på den negative  $x$ -aksen, med total strømhastighet lik 0. Anta at dette har posisjonen

$$x = -\frac{b}{2\pi}$$

Størrelsene  $U$ ,  $S$  og  $b$  er positive konstanter.

- a) Vis at  $S = Ub/2\pi$ .
- b) Argumenter for at superposisjonen kan interpreteres som strømmen omkring et strømlinjeformet legeme av en viss form. (Du trenger ikke fintege legemet.)
- c) Finn størrelsen av hastigheten inne ved "legemet" for  $x = 0$ .

**Oppgave E.12**

Den lineære Couettestrømmen mellom to parallelle plater med avstand  $h$  i  $y$ -retning, der den ene platen ligger i ro mens den andre beveger seg med hastighet  $U$  i positiv  $x$ -retning, er gitt ved

$$u = u(y) = \frac{U}{h}y, \quad v = 0$$

Vis at en strømfunksjon eksisterer for denne 2D strømtypen, men ikke et hastighetspotensial.

Denne siden er  
med fullt overlegg  
(nesten) BLANK