Løsning F.1

Referer til løsningen av Oppgave D.3: Vi beregnet der integralet

$$I_N = \int_A (u(r))^N \, dA = \frac{\pi u_m^N R^2}{N+1}$$

Med denne definisjonen, samt $V = u_m/2$ (se løsning D.3), blir

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{AV^2} \int_A u^2 \, dA \\ &= \frac{1}{V} \frac{I_2}{I_1} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

som vi ble bedt om å vise.

Løsning F.2

a) Kall hastighetene V_1 og V_2. Kontinuitetsligning og Bernoullis ligning (sistnevnte langs en strømlinje i overflaten)

$$\begin{aligned} h_1 b V_1 = &= h_2 b V_2 \\ \frac{1}{2g} V_1^2 + h_1 &= \frac{1}{2g} V_2^2 + h_2 \end{aligned}$$

gir

$$\begin{aligned} V_1 &= \sqrt{\frac{2g}{h_1 + h_2}} h_2 \\ V_2 &= \sqrt{\frac{2g}{h_1 + h_2}} h_1 \end{aligned}$$

Volumstrømraten: $\quad Q = h_1 b V_1 = h_2 b V_2 = \sqrt{\frac{2g}{h_1 + h_2}} h_1 h_2 b$

b) La F stå for kraften fra fluiden mot demningen, definert positiv mot høyre (i strømretningen). Da blir $(-F)$, fremdeles definert positiv mot høyre, kraften på fluiden fra demningen. Impulssatsen, med trykkene beregnet fra hydrostatisk trykkligning, gir:

$$\rho g \frac{h_1}{2} h_1 b - \rho g \frac{h_2}{2} h_2 b + (-F) = \rho \left(\sqrt{\frac{2g}{h_1 + h_2}} \right)^2 h_1 h_2 b (h_1 - h_2)$$

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} \rho g b \left(h_1^2 - h_2^2 - 4 h_1 h_2 \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\rho g b}{h_1 + h_2} \left(h_1^3 - 3 h_1^2 h_2 + 3 h_1 h_2^2 - h_2^3 \right) = \frac{1}{2} \rho g b \frac{(h_1 - h_2)^3}{h_1 + h_2} \end{aligned}$$

c) Tallverdier:

$$Q = \sqrt{\frac{2\cdot 9.81}{2+1}2\cdot 1\cdot 3\,\mathrm{m^3/s}} \; = \qquad 15.34\,\mathrm{m^3/s}$$

$$F = \frac{1}{2}998\cdot 9.81\cdot 3\frac{(2-1)^3}{2+1}N \; = \qquad 4.89\,\mathrm{kN}$$

Kommentar:
Denne oppgaven forekommer som eksempel i minst en lærebok, hvor det blir oversett at kraften er gitt ved et enkelt og kompakt uttrykk – man setter istedet tallene rett inn i impulssatsen og står igjen med et uoversiktelig stykke numerisk regning.

Løsning F.3

a) Legg et kontrollvolum som vist på figuren i oppgaveteksten. I impulssatsen vil summen av kreftene i strømretningen bare få bidrag fra de konstante trykkene over innløpsflaten samt ringromsflaten og over utløpsflaten:

$$p_1\frac{\pi}{4}d_2^2 - p_2\frac{\pi}{4}d_2^2 = \rho\frac{\pi}{4}d_1^2V_1(V_2 - V_1)$$

Omordnet og med kontinuitetsligningen brukt:

$$p_2 = p_1 + \rho V_1^2(\frac{d_1}{d_2})^2\left(1 - (\frac{d_1}{d_2})^2\right)$$

b) Hvis vi bruker Bernoullis ligning, forutsetter vi implisitt null mekanisk energitap. Med samme kontrollvolum som før, med p_2' for nedstrøms trykk, og på ny med kontinuitetsligningen brukt, får man:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{1}{2g}V_1^2 = \frac{p_2'}{\rho g} + \frac{1}{2g}V_2^2$$

$$p_2' = p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2\left(1 - (\frac{d_1}{d_2})^4\right)$$

I forhold til verdien ved tapsfri strøm har vi altså et nedstrøms trykktap:

$$\begin{aligned}\Delta p_2 &\approx p_2' - p_2\\ &= \frac{1}{2}\rho V_1^2\left[\left(1 - (\frac{d_1}{d_2})^4\right) - 2(\frac{d_1}{d_2})^2\left(1 - (\frac{d_1}{d_2})^2\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}\rho V_1^2\left(1 - (\frac{d_1}{d_2})^2\right)^2\end{aligned}$$

Dette må tilsvare et mekanisk energitap, som i head-formalisme skal inkluderes i tapshead:

$$h_L \approx \frac{\Delta p_2}{\rho g} = \frac{c_L}{2g}V_1^2\,, \qquad c_L = \left(1 - (\frac{d_1}{d_2})^2\right)^2$$

Kommentar:
At trykket er konstant og lik p_1 også på ringromsveggen, er en approksimasjon. Derfor er ikke p_2 som funnet fra impulssatsen helt eksakt, og det er naturlig å angi et tilnærmet resultat.
Måling av fluidstrøm skjer ofte ved *blender*, plater med hull i som settes i strømmen. Bak en slik plate er det et irreversibelt trykktap som kan approksimeres ved ovenstående uttrykk. Ved måling av trykkfallet kan man slik finne strømhastigheten.

Løsning F.4

a) Liksom i oppgaven med rør med diametersprang bruker vi impulssatsen, og bruker kontinuitetsligningen til å forenkle resultatet. Legg et kontrollvolum med vertikale innløps- og utløpsflater henholdsvis oppstrøms og nedstrøms for spranget:

$$\begin{aligned}
\rho g \frac{h_1}{2} h_1 b - \rho g \frac{h_2}{2} h_2 b &= \rho h_1 b V_1 (V_2 - V_1) \\
1 - (\frac{h_2}{h_1})^2 &= 2 \frac{V_1^2}{g h_1} \left(\frac{h_1}{h_2} - 1 \right) \\
1 + \frac{h_2}{h_1} &= 2 \frac{V_1^2}{g h_1} \frac{h_1}{h_2} \\
\frac{h_2}{h_1} &= \frac{1}{2} \left\{ -1 + \sqrt{1 + 8 \left(\frac{V_1^2}{g h_1} \right)} \right\}
\end{aligned}$$

b) Vi stiller opp energiligningen med tapsledd for samme kontrollvolum, hvor man nå må innføre middelverdiene av $p/\rho g + z$ for innløps- og utløpsflaten. Legg merke til at $p/\rho g + z$ er konstant over hver flate, men ikke med samme konstant – for flatesenteret ligger

$$\frac{1}{2}(h_2 - h_1)$$

høyere i utløpsflaten enn i innløpsflaten. Det effektive uttrykket for energiligningen, med middelverdien av $p_1/\rho g + z_1$ subtrahert bort på begge sider, blir derfor

$$\frac{1}{2g} V_1^2 = \frac{1}{2g} V_2^2 + \frac{1}{2}(h_2 - h_1) + h_L$$

Kontinuitetsligningen brukes til å eliminere V_2, og uttrykket for h_2/h_1 kan inverteres til å gi

$$\frac{1}{2g} V_1^2 = \frac{1}{4} h_1 \frac{h_2}{h_1} (1 + \frac{h_2}{h_1})$$

Alt dette innsatt i energiligningen gir:

$$\begin{aligned}
h_L &= \frac{1}{2g} V_1^2 \left(1 - (\frac{h_1}{h_2})^2 \right) - \frac{1}{2}(h_2 - h_1) \\
&= \frac{1}{4}(h_2 - h_1) \left\{ h_1 \frac{h_2}{h_1} \left(1 + \frac{h_2}{h_1} \right) \frac{1}{h_2^2} (h_2 + h_1) - 2 \right\} \\
&= \frac{1}{4}(h_2 - h_1) \left\{ \frac{1}{h_1 h_2} (h_1 + h_2)^2 - 2 \right\} \\
&= \frac{1}{4} \frac{(h_2 - h_1)^3}{h_1 h_2}
\end{aligned}$$

Kommentar:
Man kan vise at forplantningshastigheten for tyngdebølger i overflaten,

$$V_{\text{t.b.}} = \sqrt{gh}$$

oppfyller

$$V_2 < V_{\text{t.b.}} < V_1$$

Slike bølger kan altså forplante seg oppover strømmen mot spranget, men de kan ikke forplante seg videre fra sjokket oppover i strømmen. Fysisk sett er dette en nær analogi til forholdene ved *sjokkbølgen* foran fly, prosjektiler osv. som beveger seg med supersonisk hastighet.

Løsning F.5

a) Vi må beregne et tilsvarende integral som i D.3 og F.1:

$$
\begin{aligned}
J_N &= \int_A (u_2(r)_{\text{turb}})^{mN}\, dA \\
&= 2\pi R^2 {u_{\text{max}}}^N \int_0^1 (1-s)^{mN}\, s\, ds \\
&= 2\pi R^2 {u_{\text{max}}}^N \left\{ -\frac{1}{mN+1}\left[(1-s)^{mN+1} s\right]_0^1 + \frac{1}{mN+1}\int_0^1 (1-s)^{mN+1}\, ds \right\} \\
&= \frac{2\pi R^2 {u_{\text{max}}}^N}{(mN+1)(mN+2)}
\end{aligned}
$$

Da er impulskorreksjonsfaktoren gitt på en enkel måte:

$$
\begin{aligned}
\beta &= \frac{1}{AV^2}\int_A u^2\, dA \\
&= A\frac{J_2}{(J_1)^2} \\
&= \frac{(1+m)^2(2+m)^2}{2(1+2m)(2+2m)} \\
&= 1.0204\ldots \qquad\qquad (m = 1/7)
\end{aligned}
$$

b) Kontinuitetsligningen medfører at $V_{2\text{av}} = U_0$. La F være friksjonskraften på rørveggen mellom tverrsnittene 1 og 2, regnet algebraisk i forhold til positiv x-retning som velges mot høyre. Det er da $-F$ som virker på vannet. Impulssatsen gir, med $\dot{m}_1 = \dot{m}_2$ for massestrømratene i de to tverrsnittene:

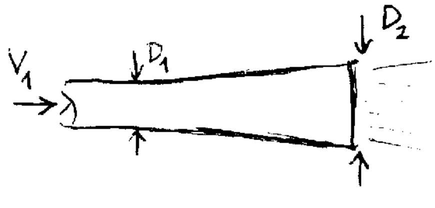
$$-F + Ap_1 - Ap_2 = \beta\, \dot{m}_2\, V_{2\text{av}} - \dot{m}_1\, U_0$$

eller

$$F = A(p_1 - p_2) - (\beta - 1)\rho A U_0^2$$

Kommentar:
Turbulent strøm får større trykkfall enn laminær. På grunn av β-faktoren blir impulsstrømleddet vanligvis minst viktig i turbulent strøm, selv om turbulent strøm kan antas å ha størst hastighet.

Løsning F.6



Kontinuitetsbetingelsen

$$V_2 = (\frac{D_1}{D_2})^2 V_1$$

samt energiligningen, anvendt mellom et tverrsnitt like oppstøms for dysen og et tverrsnitt i utløpet, gir

$$p_{1,\text{g}} = -\frac{1}{2}\rho V_1^2 \left(1 - (\frac{D_1}{D_2})^4\right)$$

La F være kraften som virker på dysen, med positiv akseretning i strømretningen. $-F$ virker da på vannet. Impulssats og kontinuitet gir:

$$-F + p_{1,\mathrm{g}}\frac{\pi}{4}D_1^2 - p_{2,\mathrm{g}}\frac{\pi}{4}D_2^2 = \rho\left(\frac{\pi}{4}D_2^2V_2^2 - \frac{\pi}{4}D_1^2V_1^2\right) \qquad (p_{2,\mathrm{g}} = 0)$$

$$\begin{aligned}
F &= -\frac{1}{2}\rho V_1^2\left(1 - (\frac{D_1}{D_2})^4\right)\frac{\pi}{4}D_1^2 - \rho\frac{\pi}{4}D_1^2V_1\,(V_2 - V_1) \\
&= \frac{1}{2}\rho V_1^2\frac{\pi}{4}D_1^2\left[(\frac{D_1}{D_2})^4 - 1 - 2\left((\frac{D_1}{D_2})^2 - 1\right)\right] \\
&= \frac{\pi}{8}\rho D_1^2V_1^2\left(1 - (\frac{D_1}{D_2})^2\right)^2 \\
&= \frac{\pi}{8}998(0.15)^2(3.0)^2\left(1 - (\frac{0.15}{0.1625})^2\right)^2\ \mathrm{N} \\
&= 1.74\,\mathrm{N}
\end{aligned}$$

Fortegnet viser at kraften peker i positiv strømretning.

Kommentar:
Her og i andre oppgaveløsninger i avsnittet har vi noen ganger stilltiende regnet med *gaugetrykk* ved beregning av krefter på føringer. Hadde vi brukt absolutte trykk i regningen, for en fluid i føringen, måtte vi logisk sett også tatt hensyn til atmosfærens absolutte trykk på utsiden for å finne netto kraft. Som vist eksplisitt i noen lærebøker – men ikke i alle – vil et konstant trykkbidrag over en lukket flate i rommet addere seg opp til null resultant. Hvis atmosfæretrykket trekkes fra de absolutte trykkene overalt, fås derfor samme totale kraft. Og man slipper fra det med et enklere regnestykke.
I et slikt idealisert tilfelle, forutsatt at energitap kan ses bort fra, viser bevaringssetningene at kraften er gitt ved et ganske enkelt uttrykk.

Løsning F.7

Legg et kontrollvolum inni dysen. Hvis F (definert positiv i strømretningen som velges som x-retning) er kraften som overføres til flensen på dysen fra boltene, vil dysen på sin side overføre $+F$ til vannet i kontrollvolumet.

a) Impulssats og kontinuitetsligning lyder:

$$\begin{aligned}
F + p_{1,\mathrm{g}}\frac{\pi}{4}D_1^2 - p_{2,\mathrm{g}}\frac{\pi}{4}D_2^2 &= \rho\frac{\pi}{4}D_1^2V_1(V_2 - V_1) \qquad (p_{2,\mathrm{g}} = p_{\mathrm{atm,g}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} 0) \\
V_1\frac{\pi}{4}D_1^2 &= V_2\frac{\pi}{4}D_2^2
\end{aligned}$$

Sammenholdt:

$$\begin{aligned}
F &= \frac{\pi}{4}D_1^2\left[\rho V_1^2\left((\frac{D_1}{D_2})^2 - 1\right) - p_{1,\mathrm{g}}\right] \\
&= \frac{\pi}{4}(0.12)^2\left[998(4.0)^2\left((\frac{0.12}{0.06})^2 - 1\right) - 400\right]\ \mathrm{N} \\
&= -3.98\,\mathrm{kN} \qquad \text{(dvs. mot stråleretningen)}
\end{aligned}$$

Fortegnet angir at boltene drar *mot* stråleretningen for å motvirke draget fra vannet på dysen, som er rettet *med* stråleretningen.

b) Tapshead, fra energiligningen:[1]

$$\begin{aligned} h_L &= \frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} + \frac{1}{2g}(V_1^2 - V_2^2) \\ &= \frac{p_{1,\mathrm{g}}}{\rho g} - \frac{1}{2g}V_1^2\left((\frac{D_1}{D_2})^4 - 1\right) \\ &= \left[\frac{400\cdot 10^3}{998\cdot 9.81} - \frac{1}{2\cdot 9.81}(4.0)^2\left((\frac{0.12}{0.06})^4 - 1\right)\right]\ \mathrm{m} \\ &= (40.87 - 12.24)\,\mathrm{m} \\ &= 28.6\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Kommentar:
Studenten kan selv sjekke ved å bruke energiligningen at hadde strømmen gjennom denne dysen vært tapsfri, ville resultatet for kraften i stedet blitt (sammenlign med oppgave F.6)

$$F \;=\; -\frac{\pi}{8}\rho D_1^2 V_1^2\left((\frac{D_1}{D_2})^2 - 1\right)^2 \;=\; -0.813\,\mathrm{kN}$$

som er mindre i tallverdi, men fremdeles rettet mot strømretningen. (Den større verdien som finnes med oppgavens tallverdier skyldes et større trykkfall fra $p_{1,\mathrm{g}}$ til 0, som avspeiler seg i den store tapsheaden.) Nedskriveren av disse løsningene er ikke brannmann, og kan derfor ikke kommentere autoritativt det nesten årvisse utsagnet fra en eller flere studenter om at man må *skyve* på brannslangedyser i retning ilden. Men for å beregne kraften i det praktiske tilfellet ville man måtte betrakte slange og dyse som ett system, som det må utøves en kraft på. Det kan spesielt tenkes at siden slangen ikke er et rettlinjet system vil innkommende impulsstrømtetthet (som bidrar negativt) få et mindre bidrag i stråleretningen, mens trykkbidraget (det bidrar også negativt) ville gi seg til kjenne som en indre strekkspenning. Resultatet kan tenkes å bli at man må skyve på dysen i stråleretningen for å holde den på plass.

Løsning F.8

I denne typen oppgaver, med ideell strøm, kan man anta at hastighetsprofilene er flate, i alle fall på steder langt unna forgreninger og andre strømforstyrrelser.

Man tenker seg en strømlinje trukket fra sentrum av den ene dyseåpningen, og en annen fra sentrum av den andre, begge bakover inntil et tverrsnitt godt oppstrøms for forgreningen. De to strømlinjene vil passere gjennom forskjellige punkter i dette tverrsnittet. Disse to punktene må ha samme strømhastighet V_1 og samme trykk p_1, dessuten samme nivå z_1.

Dyseutløpene har hastigheter V_2 og V_3, trykk $p_2 = p_3 = p_{\mathrm{atm}}$, og nivåer $z_2 = z_3 = z_1$. Man uttrykker Bernoullis ligning langs begge strømlinjene:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{1}{2g}V_1^2 + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{1}{2g}V_2^2 + z_2 \qquad (p_2 = p_{\mathrm{atm}}\,,\quad z_2 = z_1)$$

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{1}{2g}V_1^2 + z_1 = \frac{p_3}{\rho g} + \frac{1}{2g}V_3^2 + z_3 \qquad (p_3 = p_{\mathrm{atm}}\,,\quad z_3 = z_1)$$

Det ønskede resultatet følger umidelbart: $V_2 = V_3$

[1]Tapskoeffisienten k_c for dysen, som vanligvis behandles i et senere kapittel men som er gitt ved

$$h_L = k_c\frac{V_2^2}{2g}$$

får da verdien $k_c \approx 2.2$ som resultat av denne regningen. "Utenfor skalaen" ifølge vanlig størrelsesorden for slike koeffisienter—men oppgaven er faktisk hentet fra en lærebok.

Løsning F.9

Siden strømtverrsnittet er konstant gir kontinuitetsligningen at $V = |\boldsymbol{V}|$ er den samme overalt, noe som også blir tilfelle for p ut fra energiligningen. Siden (som forklart i løsningen til en annen oppgave) det er naturlig å ta hensyn til atmosfæretrykkresultanten på rørets utside i kraften på rørkneet, bruker vi gauge-trykk i impulssatsen.

Anta lagt inn et referansesystem med x-aksen mot øst og y-aksen mot nord, og et kontrollvolum i røret begrenset av rørveggene samt et normalt tverrsnitt før kneet og et annet normalt tverrsnitt etter kneet. La $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y)$ være kraften, med komponenter regnet algebraisk langs aksene, som kneet utsettes for på grunn av vannets impulsforandring. Kraften $-\boldsymbol{F}$ er da den som inngår i impulssatsen, som har komponenter

$$p_{\mathrm{g}}\frac{\pi}{4}D^2 + (-F_x) = \rho\frac{\pi}{4}D^2V(0 - V)$$

$$-p_{\mathrm{g}}\frac{\pi}{4}D^2 + (-F_y) = \rho\frac{\pi}{4}D^2V(V - 0)$$

eller

$$\begin{aligned} F_x = -F_y &= \frac{\pi}{4}D^2(p_{\mathrm{g}} + \rho V^2) \\ &= \frac{\pi}{4}(0.26)^2(400\cdot 10^3 + 998(4.0)^2)\ \mathrm{N} \\ &= 22.1\ \mathrm{kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{F}| &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \\ &= \sqrt{2}F_x \\ &= 31.2\ \mathrm{kN} \end{aligned}$$

Fortegnene viser at kraften på rørkneet er rettet mot sørøst.

Kommentar:
Det største bidraget til $|\boldsymbol{F}|$, med denne oppgavens tallverdier, kommer fra trykket. Det vil alltid være til stede selv ved 0 strøm såfremt trykket er uforandret, og gir seg til kjenne som strekkrefter i festene mellom kne og rør.

Løsning F.10

Legg et kontrollvolum som inneholder vannet i kne og dyse fra et tverrsnitt ved B til dyseutløpet. Momentet som må påsettes skal motvirke to momentbidrag fra vannet:

- Fra kraften $\boldsymbol{F}$ på grunn av strømmen i den horisontale delen
- Fra tyngden $\boldsymbol{W}$ av vannet i den horisontale delen

Anta at ideell strøm innebærer flate hastighetsprofiler overalt i rør og dyse, inklusive i selve bøyen hvor profilet antas å dreie slik at hastigheten står normalt på radius vektor til rørkrumningssenteret. Reaksjonskreftene på grunn av hastighetsforandringen, som gir vesentlige bidrag til kraften på rørkneet, vil da hovedsakelig virke i selve rørbøyen. Horisontalkomponenten av impulssatsen, med gaugetrykk innsatt:

$$-F_x - p_{2,\mathrm{g}}\frac{\pi}{4}d^2 = \rho\frac{\pi}{4}d^2V_2(V_2 - 0) \qquad (p_{2,\mathrm{g}} = 0,\ Q = \frac{\pi}{4}d^2V_2)$$

$$F_x = -\tfrac{4}{\pi}\frac{\rho Q^2}{d^2} = -\tfrac{4}{\pi}\frac{998\cdot(252.3\cdot 10^{-3})^2}{(0.13)^2}\ \mathrm{N} = \qquad -4.79\ \mathrm{kN}$$

Denne kraften vil ha en arm lik avstanden fra B til rørbøyen. Ved beregningen av vertikalkomponenten kan vi argumentere for at vannets tyngde i den horisontale delen av røret er det eneste bidraget til vertikalkraften som også bidrar til momentbalansen. Hvis vi setter opp impulssatsen i z-retning kommer det bidrag til vertikal kraft på rørgodset som skyldes trykk og hastighetsforandring, men siden de førstbevnte opptrer i B og de sistnevnte i rørbøyen vil ingen av disse bidragene til vertikal kraft få noe moment om punktet B. Det er derfor tilstrekkelig å bruke en "amputert" impulssats i z-retning og bare betrakte den kraften som vannets vekt utøver mot den horisontale rørdelen, med massefellespunkt midt på. Omtrentlig vekt av vannet (siden eksakte mål på dysen ikke er kjent) i den horisontale delen av dysen, som vil virke med samme retning og størrelse på dysen, blir:

$$W_z \approx -998\cdot 9.81\frac{\pi}{4}(0.27)^2 0.5\,\mathrm{N} \approx \qquad -0.28\,\mathrm{kN}$$

$\boldsymbol{W}$'s arm halvparten av $\boldsymbol{F}$'s arm, og vi vil finne at W_z gir bare en ca. 3% korreksjon når det totale momentet beregnes. Resten vil skyldes hastighetsforandringen. Med påsatt ytre moment Γ på røret som skal balansere vannets moment på røret, definert positivt i positiv dreieretning:

$$\Gamma = -[-0.5\cdot(-4.79) + 0.25\cdot(-0.28)]\,\mathrm{kNm} = \qquad -2.32\,\mathrm{kNm}$$

Løsning F.11

Symmetrien i figuren viser at vi trenger bare å betrakte komponenten av impulssatsen i stråleretningen fra dysen, da alle krefter normalt på denne retningen vil nulle hverandre ut. Vektoren for festekraften for platen er tegnet venstrerettet i figuren, men vi skal likevel tillate oss å regne algebraisk, dvs. som positiv i positiv stråleretning. Kraften fra platen på strålen blir lik og ensrettet med festekraften mot platen, hvis platen skal være i ro. Ingen trykkbidrag kommer til fordi gaugetrykket i stråle og fri strøm antas å være lik omgivende atmosfæres gaugetrykk, dvs. lik 0:

$$\begin{aligned} F_x &= \Sigma(\rho Q V_x)_{\text{ut}} - \Sigma(\rho Q V_x)_{\text{inn}} \\ &= 0 - \rho\frac{\pi}{4}D_{\text{stråle}}V_{\text{stråle}}\cdot(V_{\text{stråle}})_x \end{aligned}$$

$$F_x = \frac{\pi}{4}\rho {D_{\text{stråle}}}^2 {V_{\text{stråle}}}^2 = \frac{\pi}{4}998(0.1\cdot 8)^2\,\mathrm{N} = \qquad -502\,\mathrm{N}$$

Fortegnet angir at denne kraften er rettet *mot* positiv stråleretning. Forsåvidt som antydet i figuren, der kraftpilen var rettet mot venstre.

Løsning F.12

Tapsfri strøm medfører at hastighet ut er lik hastighet inn, i et referansesystem hvor skovlen står i ro. Mange lærebøker kunne vært klarere på dette punktet selv om det er trivielt.

Som i forrige oppgave, ved forhold som tilsvarer maksimal kraft:

$$\begin{aligned} F_{0x} &= \Sigma(\rho Q V_x)_{\text{ut}} - \Sigma(\rho Q V_x)_{\text{inn}} \\ &= \rho Q_{\text{inn}}\left((V_x)_{\text{ut}} - (V_x)_{\text{inn}}\right) \\ &= \rho_0 A_0 V_0(-V_0 - V_0) \\ &= -\frac{\pi}{2}\rho_0 D_0^2 V_0^2 \end{aligned}$$

For gitt inngangshastighet er dette en dobbelt så stor kraft som i forrige oppgave. For en gitt maksimal verdi av kraften tilsvarer det en maksimal innkommende strålehastighet lik

$$V_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}\frac{|F_{0x}|}{\rho_0 D_0^2}}$$

Løsning F.13

For en fri stråle er alle gaugetrykk lik 0 og kan derfor neglisjeres i impulssatsen. Legg en x-akse i stråleretningen og en y-akse mot den siden som strålen avbøyes til. Kall strålens utgående hastighetsvektor $\boldsymbol{V}_2$. (Tegn figur!) Impulssatsen gir

$$-\boldsymbol{F} = \rho\frac{\pi}{4}D^2V_1(\boldsymbol{V}_2 - \boldsymbol{V}_1)$$

hvor

$$V_1 = V_2\;, \qquad (\boldsymbol{V}_2 - \boldsymbol{V}_1)_x = V_1(\cos\theta - 1)\;, \qquad (\boldsymbol{V}_2 - \boldsymbol{V}_1)_y = V_1(\sin\theta - 0)$$

a) $F_{\|} = \frac{\pi}{4}\rho D^2V_1^2(1-\cos\theta) = \frac{\pi}{4}998(30\cdot 0.05)^2(1-(-0.5))\ \mathrm{N} \ =$ $2.65\,\mathrm{kN}$

b) $F_{\perp} = -\frac{\pi}{4}\rho D^2V_1^2\sin\theta = -\frac{\pi}{4}998(30\cdot 0.05)^2\frac{\sqrt{3}}{2}\ \mathrm{N} \ =$ $-1.53\,\mathrm{kN}$

c) $\theta_F = \arctan\frac{F_\perp}{F_\|} = -\arctan\frac{sin\theta}{1-\cos\theta} = -\arctan\left(\cot\frac{\theta}{2}\right) = -\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right) \ =$ -30^o

Kommentar:
Et resultat for vinkelen som man kunne ha gjettet geometrisk, på grunnlag av symmetribetraktninger.

Løsning F.14

Som diskutert i en tidligere oppgave antar vi at $|\ \boldsymbol{V}_A\ |=|\ \boldsymbol{V}_B\ |=|\ \boldsymbol{V}_1\ |$. Legg en x-akse i innkommende stråleretning, og tilsvarende y-akse med positiv retning til den siden hvor $\boldsymbol{V}_B$ går ut, med $\boldsymbol{F}_x$ og $\boldsymbol{F}_y$ lik komponentene av kraften på skovlen. Impulssatsen gir, med symboler uten vektortegn brukt for absoluttverdier samt gaugetrykk innsatt (husk enda en gang at det er kraften på *vannet* som inngår i uttrykket):

$$\begin{aligned} -F_x &= (1-r)\rho_{\mathrm{vann}}\frac{\pi}{4}D^2V_1V_B\cos\theta + r\rho_{\mathrm{vann}}\frac{\pi}{4}D^2V_1V_A\cos{(\theta+\pi)} - \rho_{\mathrm{vann}}\frac{\pi}{4}D^2V_1^2 \\ -F_y &= (1-r)\rho_{\mathrm{vann}}\frac{\pi}{4}D^2V_1V_B\sin\theta + r\rho_{\mathrm{vann}}\frac{\pi}{4}D^2V_1V_A\sin{(\theta+\pi)} - 0 \end{aligned}$$

$F_x = \frac{\pi}{4}\rho_{\mathrm{vann}}D^2V_1^2\left(1-(1-2r)\cos\theta\right) = \frac{\pi}{4}998(0.15\cdot 12)^2\left(1-\frac{1}{3}0.5\right)\ \mathrm{N} \ =$ $2.16\,\mathrm{kN}$

$F_y = \frac{\pi}{4}\rho_{\mathrm{vann}}D^2V_1^2\left(-(1-2r)\sin\theta\right) = \frac{\pi}{4}998(0.15\cdot 12)^2\left(-\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\ \mathrm{N} \ =$ $-0.733\,\mathrm{kN}$

Kraften har altså retning skrått mot høyre og nedover på figuren i oppgaveteksten.

Løsning F.15

La $F_\|$ og $F_\perp$ være kraftkomponenter i henholdsvis x- og y-retning. Velg for eksempel utgående stråle avbøyd mot den siden som har positiv y (det er uspesifisert i oppgaveteksten). I denne oppgaven er det hensiktsmessig å bruke impulssatsen på den formen hvor hastighetsdifferansen er uttrykt ved hastigheter relativt til skovlbladet, og la v_1 og v_2 være absoluttverdier av hastighetsvektorene henholdsvis inn og ut sett i skovlbladets hvilesystem. Den eneste relasjonen mellom absolutte og relative hastigheter vi får bruk for er den mellom innkommende hastigheter i stråleretningen,

$$V_1 = v_1 + u$$

der u er skovlens bevegelseshastighet målt i dysens hvilesystem. Impulssatsen inneholder volumstrømraten Q' relativt til skovlen og tar formen

$$-\boldsymbol{F} = \rho Q'(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1)\;, \qquad Q' = \frac{\pi}{4}\rho D^2 v_1 = \frac{\pi}{4}\rho D^2(V_1 - u)$$

der $-\boldsymbol{F}$ virker på vannet hvis $+\boldsymbol{F}$ blir definert som å virke på skovlen (nå husker du det). Skrevet på komponentform:

$$\begin{aligned} -F_{\parallel} &= \rho Q'(v_2 \cos\beta_2 - v_1) \\ -F_{\perp} &= \rho Q'(v_2 \sin\beta_2 - 0) \end{aligned}$$

a)
Etter innsetting for v_2 fra relasjonen gitt i oppgaveteksten, og deretter for v_1, får vi:

$$F_{\parallel} = \frac{\pi}{4}\rho D^2 (V_1 - u_a)^2 (1 - (1-\epsilon)\cos\beta_2) = \frac{\pi}{4} 998 (0.05\cdot(30-18))^2 \left(1 - 0.9(-\frac{\sqrt{3}}{2})\right) \text{ N} = \quad 502\,\text{N}$$

$$F_{\perp} = \frac{\pi}{4}\rho D^2 (V_1 - u_a)^2 (-(1-\epsilon)\sin\beta_2) = \frac{\pi}{4} 998 (0.05\cdot(30-18))^2 \,(-0.9\cdot 0.5)\text{ N} = \quad -127.0\,\text{N}$$

b)
Eneste forskjell i regningen i forhold til forrige punkt ligger i størrelsen $(V_1 - u)$. Vi finner svarene ved simpelthen å justere resultatene fra forrige punkt ved multiplikasjon med

$$\frac{(V_1 - v_b)^2}{(V_1 - v_a)^2} = \left(\frac{30 - (-6)}{30 - 18}\right)^2 = 9$$

og får:

$$F_{\parallel} = 9F_{\parallel}^{(a)} = \quad 4.52\,\text{kN}$$

$$F_{\perp} = 9F_{\perp}^{(a)} = \quad -1.143\,\text{kN}$$

c)
Effekt finnes på vanlig måte som skalarprodukt av kraft- og hastighetsvektor. Komponenten $F_{\perp}$, som er langs en akse perpendikulært til $\boldsymbol{u}$, bidrar derfor ikke:

$$P = F_{\parallel}^{(a)} u_a = 502\cdot 18\,\text{J/s} = \quad 9.04\,\text{kW}$$

d)
Resultatet blir negativt hvis hastigheten er motsatt rettet av kraften. Det tilsvarer at strålen ikke tilfører energi til skovlbladet, men at mekanisk energi for skovlen går tapt ved at kraften fra strålen opptrer som en bremsekraft på skovlbladet:

$$P = F_{\parallel}^{(b)} u_b = 4520\cdot(-6)\,\text{J/s} = \quad -27.1\,\text{kW}$$

Løsning F.16

a)
For en friksjonsfri strøm må energien tilført turbinen pr. vektenhet vann og pr. tidsenhet, være lik differansen i kinetisk energi-"head" for vannet pr. tidsenhet:

$$-P = \rho g Q\left(\frac{1}{2g}V_2^2 - \frac{1}{2g}V_1^2\right)$$

$$P = \frac{\pi}{8}\frac{\gamma_{\text{luft}}}{g} D_1^2 V_1 (V_1^2 - V_2^2) = \frac{\pi}{8}\frac{12}{9.81}(0.05)^2 60((60)^2 - (45)^2)\,\text{J/s} = \quad 113.5\,\text{W}$$

b)
Effekten kan også uttrykkes som

$$P = F_y \;|\boldsymbol{u}|$$

der $\boldsymbol{u}$ er turbinbladenes hastighetsvektor og F_y er komponenten i dennes retning av kraften på turbinen (med koordinatsystemet lagt inn som på figuren i oppgaveteksten). Impulssatskomponenten i bevegelsesretningen gir kraften på turbinen:

$$-F_y = \rho Q(V_2 \cos\alpha_2 - V_1 \cos\alpha_1)$$

$$F_y = \frac{\pi}{4}\frac{\gamma_{\text{luft}}}{g} D_1^2 V_1 (V_1 \cos\alpha_1 - V_2 \cos\alpha_2) = \frac{\pi}{4}\frac{12}{9.81}(0.05)^2 60\left(60\frac{\sqrt{3}}{2} - 45\frac{1}{2}\right)\ \text{N} \ = \qquad 4.25\ \text{N}$$

Det gir hastigheten for turbinbladene:

$$|\boldsymbol{u}| = \frac{P}{F_y} = \frac{113.5}{4.25}\ \text{m/s} \ = \qquad 26.7\ \text{m/s}$$

c)
"Unødige brå hastighetsforandringer" betyr at turbinbladene, som er krumme, ideelt sett bør ha overflatetangenter ved inn- og utløp som er kolineære med de innkommende og utløpende strømhastighetsvektorene. Finn først relativhastighetenes komponenter i x- og y-retning:

$$(v_1)_x = (V_1)_x = 60 \sin 30^{\text{o}}\ \text{m/s} \ = \qquad 30\ \text{m/s}$$

$$(v_1)_y = (V_1)_y - |\boldsymbol{u}| = (60 \cos 30^{\text{o}} - 26.7)\ \text{m/s} \ = \qquad 25.2\ \text{m/s}$$

$$(v_2)_x = (V_2)_x = 45 \sin 60^{\text{o}}\ \text{m/s} \ = \qquad 39.0\ \text{m/s}$$

$$(v_2)_y = (V_2)_y - |\boldsymbol{u}| = (45 \cos 60^{\text{o}} - 26.7)\ \text{m/s} \ = \qquad -4.22\ \text{m/s}$$

Kolinearitetsbetingelsen gir dermed for turbinbladenes vinkler ved inn- og utløp:

$$\beta_1 = \arctan\frac{(v_1)_x}{(v_1)_y} = \arctan\frac{30}{25.2} \ = \qquad 49.9^{\text{o}}$$

$$\beta_2 = \arctan\frac{(v_2)_x}{(v_2)_y} = \arctan\frac{39.0}{-4.22} \ = \qquad 96.2^{\text{o}}$$

Løsning F.17

a)
La F_x være kraften på bladet. I et referansesystem som beveger seg sammen med skovlen og med samme hastighet, gir impulssatsen

$$-F_x = \dot{m}_{\text{ut}} v_{\text{ut},x} - \dot{m}_{\text{inn}} v_{\text{inn},x} = -2\dot{m}_{\text{inn}} v_{\text{inn}}$$

siden bevegelsesenergien til strålen må være bevart når den betraktes i dette systemet. Man resonnerer videre:

$$\begin{aligned} v_{\text{inn}} &= V - \Omega R \\ \dot{m}_{\text{inn}} &= \rho A v_{\text{inn}} \\ P &= F_x \Omega R \end{aligned}$$

Dette gir:

$$P^{\text{blad}} = 2\rho A \Omega R (V - \Omega R)^2$$

b)
Finn ekstremalpunktene for P som funksjon av vinkelhastigheten:

$$\frac{dP}{d\Omega} = 0 \Rightarrow \qquad 2\rho A R\left\{(V - \Omega R)^2 + 2(-R)(V - \Omega R)\Omega\right\} = 0$$

Den ene Ω-verdien som oppfyller betingelsen, $\Omega = V/R$, gir trivielt nok null effekt. Den andre gir et positivt maksimum:

$$\begin{aligned} \Omega' &= \frac{1}{3}\frac{V}{R} \\ (P^{\text{blad}})_{\text{max}} &= \frac{8}{27}\rho A V^3 \end{aligned}$$

c)
Det følgende intuitive argumentet er ikke rigorøst, men gir essensen i resultatet:[2]
Et enkeltblad blir innhentet av en mindre massestrømrate enn den som dysen gir, siden det beveger seg unna strålen. Med en hjulkrans med mange blad tett i tett, skjer det derimot at når ett blad beveger seg unna og ut av strålen, vil dette bli avløst av et nytt som kommer inn og tar dets plass. Vekselvirkningen mellom turbin og stråle vil derfor skje på et fast sted, og i massestrømraten inngår da den fulle strålehastigheten:

$$\dot{m}_{\text{inn}} \to \rho A V$$

Alle andre størrelser er uforandret, og det medfører at

$$P^{\text{turbin}} = 2\rho A \Omega R V (V - \Omega R)$$

Denne størrelsen har bare ett ekstremalpunkt, som blir et maksimum:

$$\begin{aligned} \Omega' &= \frac{1}{2}\frac{V}{R} \\ (P^{\text{turbin}})_{\text{max}} &= \frac{1}{2}\rho A V^3 \end{aligned}$$

d)
Du forvisser deg raskt om at eneste forandring i forhold til punkt a), b) og c) ligger i erstatning av første ligning under punkt a) med den følgende:

$$-F_x = \dot{m}_{\text{ut}} v_{\text{ut},x} - \dot{m}_{\text{inn}} v_{\text{inn},x} = -(1 - \cos\alpha_2)\dot{m}_{\text{inn}} v_{\text{inn}}$$

Det medfører:

$$\Omega' = \frac{1}{2}\frac{V}{R} = \frac{1}{2}\frac{45}{1.2}\ \text{rad/s} = 18.75\ \text{rad/s} = 179.0\ \text{rpm}$$

$$(P^{\text{turbin}})_{\text{max}} = \frac{\pi}{16}(1 - \cos\alpha_2)\rho D^2 V^3 = \frac{\pi}{16}\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right) 998(0.065)^2(45)^3\ \text{J/s} = 148.3\ \text{kW}$$

Løsning F.18

a)
La F_{friksjon} og $F_{\text{stråle}}$ være de to kreftene som virker horisontalt på tanken, begge definert positive mot høyre. La V være utstrømshastigheten fra hullet, som er gitt av Bernoullis ligning:

$$\begin{aligned} F_{\text{friksjon}} &= \beta\left(W + \frac{\pi}{4}\rho g D^2(h + h')\right) \\ -F_{\text{stråle}} &= \rho\frac{\pi}{4}d^2 V(V - 0) \qquad (V = \sqrt{2gh}) \\ &= \frac{\pi}{2}\rho g d^2 h \end{aligned}$$

[2] Det er forøvrig vanskelig å finne noen bedre forklaring i lærebokslitteraturen.

Tanken vil begynne å skli såfremt $F_{\text{friksjon}} + F_{\text{stråle}} < 0$:

$$\beta\left(W + \frac{\pi}{4}\rho g D^2(h+h')\right) < \frac{\pi}{2}\rho g d^2 h$$

b)
Derivasjon mhp. h gir

$$\begin{aligned}(F_{\text{friksjon}})' &= \frac{\pi}{4}\beta\rho g D^2\\ (F_{\text{stråle}})' &= \frac{\pi}{2}\rho g d^2\end{aligned}$$

Hvis

$$\beta < 2\left(\frac{d}{D}\right)^2 \approx 0.031$$

medfører det at reaksjonskraften vokser raskere med økende h enn friksjonskraften gjør. Det vil da alltid finnes h-verdier over en nedre skranke som gjør at ulikheten funnet under punkt a) blir oppfylt, og tanken vil begynne å skli for slike h-verdier. I motsatt fall vil ikke ulikheten kunne bli oppfylt.

Med β-verdien forutsatt i oppgaveteksten kan altså ikke tanken begynne å skli for noen verdier av h.[3]

Løsning F.19

Hvis F_x, regnet positiv mot høyre, er kraften på motoren fra festene, ser vi at $(+)F_x$ også blir kraften som motoren utøver på gassen i kontrollvolumet. Bruk impulssatsen, med gaugetrykk innført av hensiktsmessighetsgrunner for å slippe å ta hensyn til lufttrykkreftene på motorens utside:

$$F_x + p_{\text{atm,gauge}}A_1 - p_{\text{atm,gauge}}A_2 = \dot{m}_2 V_2 - \dot{m}_1 V_1 = \dot{m}_1\left\{(1+R)V_2 - V_1\right\}$$

Hvorfra, siden $p_{\text{atm,gauge}} = 0$:

$$F_x = \rho_{\text{luft}} A_1 V_1 \left\{(1+R)V_2 - V_1\right\} = 1.205\cdot 0.5\cdot 250\left((1+\frac{1}{30})900 - 250\right)\ \text{N} = \quad 102.4\,\text{kN}$$

[3] Vi ser da bort fra den forsåvidt logiske slutningen at det ideelle væskesølet på underlaget vil kunne flyte inn under tanken og senke friksjonskoeffisienten, slik at tanken likevel kan skli!

Denne siden er
med fullt overlegg
(nesten) BLANK