Løsning G.1

En rigorøs utledning, som må baseres på begreper fra tensoranalyse, skal vi ikke kaste oss ut i. En standard "utledning" på intuitivt plan kan gå som følger: Definer

$$\tau_{ij} = \text{spenningskomponent i } j\text{-retning, med flatenormal i } i\text{-retning}$$

For å unngå at infinitesimale kubiske volumelementer skal få uendelig store rotasjonsvinkelakselerasjoner pga. skjærspenninger må vi kreve at

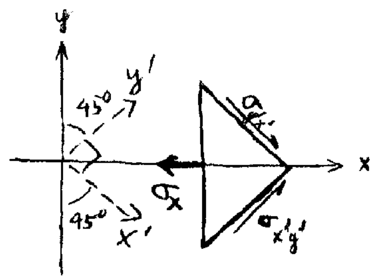
$$|\tau_{ij}| = |\tau_{ji}|$$

(samme dreiemoment fra sider som støter opp til en kant). Formen må være en generalisering av definisjonsligningen for viskositet:

$$\tau_{yx} = \mu\frac{\partial u}{\partial y} \to \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

For koordinater og hastighetskomponenter har vi følgende sammenheng mellom de to koordinatsystemene:

Anta 0 trykk- og hastighetsvariasjon i z-retning slik at en 2D behandling er tilstrekkelig, og betrakt et infinitesimalt kvadratisk element i xy-planet, med kanter dreid $45^{\,o}$ i forhold til aksene. Se bort fra det isotrope bidraget til normaltrykket i overflaten, som ikke vil bidra til den totale kraftbalansen. Del elementet opp i to triangler, og betrakt kraftbalansen for ett av dem, i tilfellet med 0 akselerasjon:



$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) \qquad u' = \frac{1}{\sqrt{2}}(u-v)$$
$$y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \qquad v' = \frac{1}{\sqrt{2}}(u+v)$$

Likevekt av krefter i x-retning gir, med normalspenningen rettet positivt *ut* av en lukket flate som vanlig konvensjon:

$$\begin{aligned}
\tau_{xx} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\tau_{x'y'} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\tau_{y'x'} \\
&= \tau_{x'y'} \\
&= \mu\left(\frac{\partial v'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial y'}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial v}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial y'} - \frac{\partial v}{\partial y'}\right) \\
&= \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) \\
&= \mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) \\
&= \mu\left[2\frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] \\
&= 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}
\end{aligned}$$

Tilsvarende ville vi ha funnet

$$\tau_{yy} = 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}\ , \qquad \tau_{zz} = 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}$$

for de viskøse normalspenningsbidragene i y- og z-retning, noe som også er ventet av symmetrigrunner. Disse τ'ene kommer i tillegg til det isotrope statiske trykkbidraget, men altså definert positiv utover.

Løsning G.2

I antagelsen om laminær strøm samt translasjonssymmetri i x-retning, og ingen strøm i z-retning, ligger det implisitt at

$$v = w = 0$$

Fra kontinuitetsligningen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 0 + 0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad u = u(y,z) = u(y)$$

Alle tre komponenter av $(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}$ blir lik null med disse resultatene for u, v og w. Navier-Stokes-ligningens komponenter i strømretningen og tvers på denne reduserer seg derfor til:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + g\sin\theta + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ 0 &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - g\cos\theta \end{aligned}$$

Grensebetingelser:

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 && \text{(hefting)} \\ p(x,y)\mid_{y=h} &= p_{\text{atm}} \\ \tau_{yx}\mid_{y=h} &= 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y}\mid_{y=h} = 0 && \text{(fri overflate)} \end{aligned}$$

Deriver x- og y-komponenten av Navier-Stokes-ligningen med x:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) &= \nu\nabla^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) &= 0 \end{aligned}$$

som gir

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \text{konstant} = 0 \qquad \text{(uavhengig av både } x \text{ og } y\text{)}$$

der verdien 0 framkommer når betingelsen om konstant overflatetrykk pålegges.

a)
Nå kan Navier-Stokes-ligningens x-komponent integreres. Med c_1, c_2 og c_3 konstanter får vi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 2c_1 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 2c_1 y + c_2 \\ u(y) &= c_1 y^2 + c_2 y + c_3 \end{aligned}$$

Her er

$$\begin{aligned} c_3 &= 0 && \text{(heftingsbetingelsen)} \\ c_2 &= -2hc_1 && \text{(fri-overflate-betingelsen)} \end{aligned}$$

Med $C = -c_1$ er derfor hastighetsprofilet

$$u(y) = Cy(2h - y)$$

b)
Integrer Navier-Stokes-ligningens y-komponent, og få:

$$p = f(x) - \rho g \cos\theta\, y$$

Men $\partial p/\partial x = 0$, så $f(x)$ må være en ren konstant uavhengig av x. Den bestemmes ved overflaten slik at det søkte resultatet framkommer:

$$p(x, y) = p_{\text{atm}} + \rho g \cos\theta (h - y)$$

c)
Fra Navier-Stokes-ligningens x-komponent og integrasjonen av den, samt den funne verdien av $\partial p/\partial x$, har vi allerede at

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{g \sin\theta}{\nu} = 2c_1 = -2C$$

og det søkte resultatet framkommer:

$$C = \frac{\rho g \sin\theta}{2\mu}$$

d)
Ved midling av u over høyden h:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{h}\int_0^h u\, dy \\ &= \frac{1}{h} C \int_0^h (2hy - y^2)\, dy \\ &= \frac{1}{h} C (h^3 - \frac{1}{3} h^3) \\ &= \frac{2}{3} C h^2 \\ &= \frac{2}{3} u_{max} \end{aligned}$$

med $u_{max} = u(h)$, ut fra grensebetingelsen $\partial u/\partial y = 0$ for $y = h$.

e)
Ut fra definisjonen av middelhastighet følger det også at

$$Q/b = Vbh/b = \frac{2}{3} C h^3 = \frac{\rho g h^3 \sin\theta}{3\mu}$$

Løsning G.3

Anta fluiden delt inn i skikt parallelle med bunnen, av tykkelse Δy. Hvert av dem har en hastighetsdifferanse

$$\Delta u \approx \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y$$

i forhold i forhold til skiktet innenfor. Skjærkraften pr. arealenhet mellom to skikt er

$$\tau_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

slik at effekttapet over et kontrollvolum med utstrekninger L, Δy og b henholdsvis x-, y- og z-retning, blir

$$\Delta P \approx bL\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \Delta y$$

Totalt energitap over hele strømhøyden:

$$\begin{aligned} P/\Delta x &= bL\mu \int_0^h \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dy \\ &= 4bL\mu C^2 \int_0^h (h-y)^2\, dy \\ &= \frac{4}{3} bL\mu C^2 h^3 \\ &= \frac{3bL\mu V^2}{h} \end{aligned}$$

Løsning G.4

Med de gitte forutsetningene, reduserer x-komponenten av Navier-Stokes-ligningen seg til

$$(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)u = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

Den søkte gradientkomponenten blir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\rho_0(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)u \\ &= -\rho_0(2xy\frac{\partial}{\partial x} - y^2\frac{\partial}{\partial y})2xy \\ &= -2xy^2\rho_0 \end{aligned}$$

Kommentar:
Bevegelsesligningen gir trykket, også i tilfeller hvor strømfeltet kan behandles med grunnleggende hydrodynamiske metoder.
Dette ikke er en potensialstrøm, siden $\xi \neq 0$. Navier-Stokes-ligningen gir generelt at det er viskositeten som skaper virvling i en fluid som i utgangspunktet var virvlingsfri (men det har vi ikke anledning til å komme nærmere inn på her). Forsåvidt en inkonsistens i oppgavens formulering, selv om den er hentet fra en lærebok), medmindre man forutsetter at virvlingen var skapt på forhånd med en eller annen gitt metode.

Løsning G.5

Kombinasjoner av L og V gir dimensjonsløs tid t' samt et naturlig valg av dimensjonsløst trykk p':

$$t = \frac{L}{V}t' \,, \qquad p = \rho V^2 p'$$

Innsatt:

$$\frac{V^2}{L}\frac{D\boldsymbol{u'}}{Dt'} = -\frac{1}{\rho}\frac{\rho V^2}{L}\nabla' p' + g\hat{\boldsymbol{g}} + \nu\frac{V}{L^2}\nabla'^2\boldsymbol{u'}$$

Eller:

$$\frac{D\boldsymbol{u'}}{Dt'} = -\nabla' p' + \frac{1}{(\mathrm{Fr})^2}\hat{\boldsymbol{g}} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla'^2\boldsymbol{u'}$$

Her opptrer Reynoldstallet Re og Froudetallet Fr:

$$\mathrm{Re} = \frac{VL}{\nu} \,, \qquad \mathrm{Fr} = \frac{V}{\sqrt{gl}}$$

Det framgår at løsningene av to forskjellige strømsituasjoner vil kunne transformeres over i hverandre ved rene skaleringer av lengder og hastigheter, såfremt de har samme Reynolds- og Froudetall (samt at grensebetingelsene kan transformeres over i hverandre på tilsvarende måte). Siden det ofte er enten de viskøse kreftene eller tyngdekreftene som dominerer i et aktuelt strømproblem, er det vanlig å kreve at henholdsvis Reynolds- og Froudetallene er like.

Denne skaleringen av Navier-Stokes-ligningen ligger til grunn for similaritetsteorien for modellforsøk. Begrunnelsen man i stedet finner i lærebøker er oftest av generell dimensjonsanalytisk natur.

Denne siden er
med fullt overlegg
(nesten) BLANK