

# G. Navier-Stokes-ligningen

Her er samlet noen oppgaver av en type som forekommer i noen av lærebøkene. Dette stoffet er av betydning for en fysisk forståelse av fluidmekanikken. Det blir imidlertid ofte knapp tid i løpet av forelesningene til å legge vekt på det, annet enn på en summarisk måte.

## Oppgave G.1

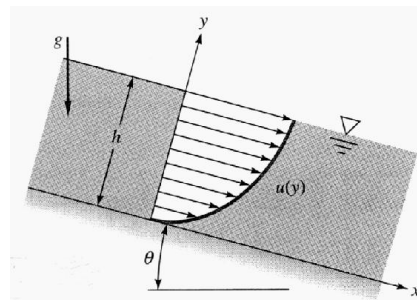
Sannsynliggjør at i en inkompressibel fluid med viskositet  $\mu$  vil det, i tillegg til skjærspenninger, opptre ekstra normalspenningsbidrag gitt ved

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

for  $x$ -retningen, og tilsvarende for  $y$ - og  $z$ -retningene.

## Oppgave G.2

En film av en inkompressibel viskøs væske, med konstant tykkelse  $h$  overalt, strømmer laminært og stasjonært nedover et plan som danner en vinkel  $\theta$  med horisontalplanet. Det antas at strømmen går i  $x$ -retning og at  $y$ -aksen står normalt på planet som på figuren, og at det ikke er noen strøm i  $z$ -retning (innover i skjermen/papiret) eller noen hastighetsvariasjon i den retningen. Det antas 0 friksjon mot atmosfæren over filmen.



a) Vis at hastighetsprofilen har formen

$$u = Cy(2h - y), \quad v = w = 0$$

med  $C$  en konstant.

b) Vis at trykket er

$$p(x, y) = p_{\text{atm}} + \rho g \cos \theta (h - y)$$

der  $p_{\text{atm}}$  er det stedsuavhengige atmosfæretrykket over væsken.

c) Vis at

$$C = \frac{\rho g \sin \theta}{2\mu}$$

d) Vis at hastighetens middelvei  $V$  er relatert til maksimalhastigheten  $u_m$  ved

$$V = \frac{2}{3}u_m$$

e) Finn  $Q/b$ , volumstrømraten pr. breddeenheter (bredden  $b$  regnet innover i skjermen/papiret).

**Oppgave G.3 (UTENFOR PENSUM!)**

Ved strømmen beskrevet i forrige oppgave utfører skjærkreftene et arbeid på fluiden. Det gir en energitilførsel som må gå tapt som varme. Vis ved integrasjon at det viskøse energitapet pr. tidsenhet i et kontrollvolum med lengde  $L$  i strømrretningen og tverrsnitt  $bh$ , der  $b$  er strømbredden og  $h$  er strømhøyden, er lik

$$P = \frac{3bL\mu V^2}{h}$$

**Oppgave G.4**

En friksjonsløs horisontal stasjonær strøm av en inkompressibel fluid med tetthet  $\rho_0$  har hastighetsfeltet (i vilkårlige enheter)

$$u = 2xy, \quad v = -y^2$$

Finn et uttrykk for trykkgradienten i  $x$ -retning, under forutsetning av at man kan se bort fra innvirkning av tyngde.

**Oppgave G.5 (INNLEDNING TIL SIMILARITETSTEORIEN)**

Skriv Navier-Stokes-ligningen om på dimensjonsløs form, ved å innføre dimensjonsløse (merkede) størrelser:

$$\mathbf{r} = L\mathbf{r}', \quad \nabla = \frac{1}{L}\nabla', \quad \mathbf{u} = V\mathbf{u}', \quad \mathbf{g} = g\hat{\mathbf{g}}$$

Her er  $L$  og  $V$  lengde- og hastighetsskalaer som er typiske for strømproblemet som studeres, og  $\hat{\mathbf{g}}$  en enhetsvektor i tyngdekraftens retning.

Hva kan resultatet antyde om hvilken rolle Reynoldstallet og Froudetallet spiller i similaritet mellom to strømsituasjoner?