Løsning H.1

Løsning H.2

Løsning H.3

Similaritetskravet blir at Reynoldstallene må være like, siden ingen bølgeeffekter (dvs. tyngdeeffekter) bidrar:

$$\left(\frac{VD}{\nu}\right)_p = \left(\frac{VD}{\nu}\right)_m$$

a)

$V_m = \frac{D_p}{D_m}\frac{\nu_m}{\nu_p}V_p = \frac{1}{3}\frac{1.05\cdot 10^{-6}}{1.003\cdot 10^{-6}}1.5 \text{ m/s} =$ 0.52 m/s

b)

Husk at $F_I = \rho V^2 L^2$, og bruk similaritetskravet på den grunnleggende formen

$$\left(\frac{F_I}{F_V}\right)_p = \left(\frac{F_I}{F_V}\right)_m$$

$F_{Vm} = \frac{F_{Im}}{F_{Ip}}F_{Vp} = \frac{\rho_m}{\rho_p}(\frac{V_m}{V_p})^2(\frac{D_m}{D_p})^2 F_{Vp}$

$\quad = \frac{17.4}{998.2}(\frac{0.52}{1.5})^2 3^2 \cdot 10 \text{ N} =$ 0.19 N

c)

Med gassligningen og tabellverdier for universell gasskonstant og molmasse for luft fra tidligere avsnitt, fås:

$\rho_m = \frac{pM_{\text{luft}}}{R_0 T} = \frac{1.5\cdot 10^6 \cdot 28.964}{8314.5\cdot 300} \text{ kg/m}^3 =$ 17.42 kg/m^3

$\nu_m = \frac{\mu_m}{\rho_m} = \frac{18.3\cdot 10^{-6}}{17.42} \text{ m}^2\text{/s} = 1.05\cdot 10^{-6} \text{ m}^2\text{/s} =$ 1.05 cSt

Løsning H.4

Løsning H.5

Similaritetskravet blir at Froudetallene må være like:

$$\left(\frac{V}{\sqrt{gL}}\right)_p = \left(\frac{V}{\sqrt{gL}}\right)_m$$

$V_m = \sqrt{\frac{L_m}{L_p}}V_p$

$\quad = \sqrt{\frac{3}{180}}40 \text{ km/h} = 5.16 \text{ km/h} =$ 1.43 m/s

$\text{Fr} = \frac{V_m}{\sqrt{gL_m}} = \frac{1.43}{\sqrt{9.81\cdot 3}} =$ 0.264

Løsning H.6

Tyngde og treghet er de dominerende kreftene, så Froudetallskravet må være oppfylt:

a)

$$V_p = \sqrt{\frac{L_p}{L_m}} V_m = \sqrt{\frac{40}{1}} 0.5 \text{ m/s} \; = \qquad 3.16 \text{ m/s}$$

b)
Bruk similaritetskravet på grunnleggende form:

$$\left(\frac{F_I}{F_G}\right)_p = \left(\frac{F_I}{F_G}\right)_m$$

$$F_{Gp} = \frac{F_{Ip}}{F_{Im}} F_{Gm} = \frac{(\rho V^2 L^2)_p}{(\rho V^2 L^2)_m} F_{Gm}$$
$$= (\frac{L_p}{L_m})^3 F_{Gm} = (40)^3 \, 0.12 \text{ N} \; = \qquad 7.7 \text{ kN}$$

Løsning H.7

Løsning H.8

Løsning H.9

For både prototypen og modellen vil volumstrømraten være proporsjonal med bredden når andre parametre – spesielt vannhøyden over demningen – holdes konstante. Vi kjenner skalaforholdet λ, men dette er ikke lik det aktuelle breddeforholdet b_m/b_p. Ved dynamisk similaritet for de oppgitte parametrene må vi derfor foreta en ekstra skalering og først finne volumstrømraten $\tilde{Q}_p$ over en demning med bredde $\tilde{b}_p = b_m/\lambda$:

$$\frac{Q_p}{b_p} = \frac{\tilde{Q}_p}{b_m/\lambda} \; , \qquad \lambda = \frac{b_m}{\tilde{b}_p} \neq \frac{b_m}{b_p}$$

Fra similaritetskravet om like Froudetall på grunn av tyngdedominert strøm, har vi

$$V_p = \sqrt{\frac{L_p}{L_m}} V_m = V_m/\lambda^{1/2}$$

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_p &= \tilde{b}_p h_p V_p \\ &= (b_m h_m/\lambda^2)(V_m/\lambda^{1/2}) \\ &= Q_m/\lambda^{5/2} \end{aligned}$$

og følgelig

$$Q_p = \lambda \frac{b_p}{b_m} \frac{1}{\lambda^{5/2}} Q_m$$
$$= \frac{b_p}{b_m \lambda^{3/2}} Q_m = \frac{200}{0.25 \cdot (0.04)^{1.5}} 20 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3\text{/s} \; = \qquad 2000 \text{ m}^3\text{/s}$$

Kommentar:
I forbindelse med det som det ble spurt om i denne oppgaven, fikk man ikke bruk for de oppgitte tallverdiene av h_m og H_m, siden Q_m og λ er kjent. Derimot viser den lave verdien $b_m/h_m = 5/3$ at viskøse effekter ved modellendene kan spille en større rolle enn hvis en bredere modell hadde blitt brukt.

Løsning H.10

Løsning H.11

Med de 5 antatt relevante variablene har vi:

$$V = f(D, \rho, \mu, \sigma) \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{f}(V, D, \rho, \mu, \sigma) = 0$$

Velg MLT-systemet. Det viser seg at alle de 3 grunnleggende dimensjonene M, L og T inngår i variablene:

$$n = 5\ , \qquad m = 3$$

Reduksjonstallet k: Prøv de m variablene V, D, ρ og finn

$$\left(\frac{L}{T}\right)^i (L)^j \left(\frac{M}{L^3}\right)^k = M^k L^{i+j-3k} T^{-i}$$

Produktet $V^i D^j \rho^k$ kan ikke gjøres dimensjonsløst for noen valg av potensene, så vi velger dem som primære (gjentatte) variable og har

$$k = m = 3$$

Ved beregningen av de $n - k = 2$ dimensjonsløse gruppene skal vi bruke en mer generell metode enn i læreboka, idet vi lar også de gjenværende variablene få en vilkårlig eksponent.[1] For hver av de $n - k = 3$ dimensjonsløse gruppene fås da 3 ligninger med 4 ukjente, slik at vi kan finne tre av de ukjente uttrykt ved den fjerde. For Π_1:

$$\Pi_1 = V^a D^b \rho^c \mu^{d_1}$$

$$M^0 L^0 T^0 = \left(\frac{L}{T}\right)^a (L)^b \left(\frac{M}{L^3}\right)^c \left(\frac{M}{LT}\right)^{d_1}$$

$$\begin{array}{rrcl} M: & 0 & = & c + d \\ L: & 0 & = & a + b - 3c - d_1 \qquad\qquad \Rightarrow \qquad a = b = c = -d_1 \\ T: & 0 & = & -a - d_1 \end{array}$$

$$\Pi_1 = \left(\frac{\rho V D}{\mu}\right)^{-d_1} = \text{Re}^{-d_1}$$

For Π_2:

$$\Pi_2 = V^a D^b \rho^c \sigma^{d_2}$$

$$M^0 L^0 T^0 = \left(\frac{L}{T}\right)^a (L)^b \left(\frac{M}{L^3}\right)^c \left(\frac{M}{T^2}\right)^{d_2}$$

$$\begin{array}{rrcl} M: & 0 & = & c + d_2 \\ L: & 0 & = & a + b - 3c \qquad\qquad \Rightarrow \qquad a = -2d,\ b = c = -d_2 \\ T: & 0 & = & -a - 2d_2 \end{array}$$

$$\Pi_2 = \left(\frac{\sigma}{V^2 D \rho}\right)^{d_2} = \text{Wb}^{-d_2/2}$$

Π^1 og Π^2 kan altså skrives som potenser av henholdsvis Reynoldstallet og Webertallet, hvorav det sistnevnte

$$\text{Wb} = \frac{V}{\sqrt{\sigma/\rho D}}$$

er forholdet mellom treghetskrefter og overflatespenningskrefter.

De 5 variablene har altså samlet seg i 2 dimensjonsløse grupper. Disse er relatert via en funksjon ϕ som må bestemmes på annet vis, for eksempel eksperimentelt. Boblens stigehastighet V kan finnes:

$$\Pi_2 = \phi(\Pi_1)$$

$$\text{Wb}^{-d_2/2} = \left(\frac{\sigma}{V^2 D \rho}\right)^{d_2} = \phi(\text{Re}^{-d_1})$$

[1] For μ og σ gir Newtons 2. lov at 1 kg/ms $=$ 1 Ns/m^2 og 1 kg/s^2 $=$ 1 N/m.

$$V = \phi^{-1/2d_2}(\mathrm{Re}^{-d_1})\sqrt{\frac{\sigma}{\rho D}}$$

Men vi har lov til å omdøpe ϕ, og får da et enklere sluttresultat for stigehastigheten:

$$V = \phi(\mathrm{Re})\sqrt{\frac{\sigma}{\rho D}}$$

Kommentar:
I noen lærebøker kan man finne potensene d_1 og d_2 innført eksplisitt i mellomregningen, som her, istedenfor å sette dem lik 1. Ved å innføre dem har vi påvist og benyttet til overmål at ϕ er en ubestemt funksjon.

Løsning H.12