Løsning I.1

Fra definisjonen av Reynoldstall:

$$V_{\text{krit}} = \frac{\text{Re}_{\text{krit}}\nu}{D} = \frac{2300 \cdot 0.135 \cdot 10^{-4}}{0.15}\ \text{m/s} \ = \qquad 0.207\ \text{m/s}$$

Løsning I.2

Finn først fra definisjonen av Reynoldstall hvilken verdi av viskositeten som tilsvarer det omtrentlige omslagspunktet mellom laminær og turbulent strøm:

$$\nu_{\text{krit}} = \frac{VD}{\text{Re}_{\text{krit}}} = \frac{4}{\pi}\frac{Q}{\text{Re}_{\text{krit}}D} = \frac{4}{\pi}\frac{850 \cdot 10^{-6}}{2300 \cdot 0.08}\ \text{m}^2\text{/s} \ = \qquad 5.88 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^2\text{/s}$$

Strømmen blir laminær for høyere ν-verdier, og turbulent for lavere:

a) Hydrogen:	$\nu/\nu_{\text{krit}} \approx$	18	$\Rightarrow$	laminær
b) Luft:		2.6		laminær
c) Bensin:		0.07		turbulent
d) Vann:		0.17		turbulent
e) Kvikksølv:		0.02		turbulent
f) Glyserol:		202		laminær

Løsning I.3

I regninger av dette slaget lønner det seg ofte å innføre referanseverdier for størrelsene som varierer, for å spare arbeid ved gjentagelser:

$$\text{Re} = \frac{4}{\pi}\frac{Q}{D\nu} = \frac{4}{\pi}\frac{0.001}{0.03 \cdot 89 \cdot 10^{-6}}\left(\frac{Q}{0.001\ \text{m}^3\text{/s}}\right) \ = \qquad 477\left(\frac{Q}{0.001\ \text{m}^3\text{/s}}\right)$$

a)
$Q = 1$ l/s medfører Re $= 477$ og derfor laminær strøm:

$$L_e \approx 0.058D\text{Re} = 0.058 \cdot 0.03 \cdot 477\,\text{m} \ = \qquad 0.83\ \text{m}$$

b)
$Q = 30$ l/s medfører Re $= 14300$, og da er strømmen turbulent:

$$L_e \approx 4.4 \cdot 0.03(14300)^{1/6}\ \text{m} \ = \qquad 0.65\ \text{m}$$

Løsning I.4

Regn både for laminær og turbulent strøm, og sjekk hvilket svar som gir konsistens.

Hvis laminær: $$\text{Re} \approx \frac{L_e}{0.058D} = \frac{0.15}{0.058 \cdot 0.01} \ = \qquad 259$$

Hvis turbulent: $$\text{Re} \approx \left(\frac{L_e}{4.4D}\right)^6 = \left(\frac{0.15}{4.4 \cdot 0.01}\right)^6 \ = \qquad 1570$$

For Re $= 1570$ i et glatt rør kan vi ikke ha turbulent strøm. Den må altså være laminær og ha Re $= 259$:

$$Q = \frac{\pi}{4}D^2V = \frac{\pi}{4}\nu R\,\text{Re} = \frac{\pi}{4}0.89 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-2} \cdot 259\,\text{m}^3\text{/s} = 0.000181\,\text{m}^3\text{/s} \ = \qquad 0.65\ \text{m}^3\text{/h}$$

Kommentar:
Det er fullt mulig å forestille seg andre parameterverdier der en stabilt laminær og en turbulent strøm ville hatt samme verdi for L_e, slik at oppgaven ville hatt et tvetydig svar.

Løsning I.5

a)
La $A = \frac{\pi}{4}D^2 = a^2$ bety felles areal, der D er sylindrisk rørdiameter og a kvadratets sidekant.

$$(R_h)_{\text{sylinder}} = \frac{A}{P} = \frac{A}{\pi D} = \frac{A}{\pi\sqrt{\frac{4}{\pi}}\sqrt{A}} = \qquad \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{A}$$

$$(R_h)_{\text{kvadrat}} = \frac{A}{P} = \frac{A}{4a} = \frac{A}{4\sqrt{A}} = \qquad \frac{1}{4}\sqrt{A}$$

Verdien for det sylindriske røret er størst. Prosentvis er den for det kvadratiske røret mindre med verdien

$$100\frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{2\sqrt{\pi}}}{\frac{1}{2\sqrt{\pi}}}\,\% = 100\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi} - 1\right)\,\% = \qquad -11.4\,\%$$

b)
La $a = 15$ cm og $b = 35$ cm være sidekantenes lengde. Hydraulisk radius blir:

$$R_h = \frac{ab}{2(a+b)} = \frac{1}{2}\frac{0.15\cdot 0.35}{0.15 + 0.35}\text{ m} = \qquad 5.25\text{ cm}$$

Kommentar:
Begrepet hydraulisk radius brukes i praksis i en viss utstrekning ved ikke-sirkulære strømtverrsnitt, noe som må antas å ha en viss empirisk begrunnelse. Det er likevel nyttig å merke seg at man er på ville veier hvis fysisk forståelse og kontroll med nøyaktighet er ønskelig.

Løsning I.6

Bestem først strømtypen:

$$\text{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{4}{\pi}\frac{Q}{D\nu} = \frac{4}{\pi}\frac{0.0003}{0.075\cdot 0.00065} = \qquad 7.8$$

Dette medfører laminær strøm, der $f_{\text{lam}} = 64/\text{Re}$ innsettes for f i uttrykket for head-tap:

$$\frac{h_L}{L} = \left[64/\left(\frac{4}{\pi}\frac{Q}{D\nu}\right)\right]\frac{1}{D}\frac{1}{2g}\left(\frac{4}{\pi D^2}Q\right)^2 = \frac{128}{\pi}\frac{\nu}{gD^4}Q = \frac{128}{\pi}\frac{0.00065\cdot 0.0003}{9.81(0.075)^4}\text{ m/m} = \qquad 0.0256\text{ m/m}$$

Løsning I.7

$\text{Re} = 800 < \text{Re}_{\text{krit}}$ medfører laminær strøm:

$$h_L = f_{\text{lam}}\frac{L}{D}\frac{1}{2g}V^2 = \frac{64}{\text{Re}}\frac{L}{D}\frac{1}{2g}\left(\frac{\nu}{D}\right)^2(\text{Re})^2 = 32\frac{L\nu^2\text{Re}}{gD^3} = 32\frac{900(0.0005)^2 800}{9.81(0.1)^3}\text{ m} = \qquad 587\text{ m}$$

$$Q = AV = \frac{\pi}{4}D\nu\text{Re} = \frac{\pi}{4}0.1\cdot 0.0005\cdot 800\,\text{m}^3/\text{s} = \qquad 31.4\text{ l/s}$$

Kommentar:
Opplysningen om spesifikk vekt var overflødig, da denne (eller tettheten) inngår i problemet bare via Reynoldstallet som var spesifisert. – Head-tapet er betydelig i forhold til rørlengden. Du kan selv forvisse deg om at hvis den stasjonære strømmen skal være tyngdedrevet, så må det forutsetningsvis rette røret danne skråvinkelen

$$\theta = \arcsin\left(\frac{h_L}{L}\right) = 40.7^{\text{o}}$$

med horisontalplanet.

Løsning I.8

a)
Ved direkte utregning:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(uv) + \frac{\partial}{\partial z}(uw) &= 2u\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial u}{\partial y} + u\frac{\partial w}{\partial z} + w\frac{\partial u}{\partial z} \\
&= \left(u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}\right) u + u\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\
&= (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\, u
\end{aligned}$$

siden siste parentes i nest siste linje er lik 0 på grunn av kontinuitetsbetingelsen.

b)
Vi substituerer for $(u,\, v,\, w)$ i Navier-Stokes-ligningens x-komponent, og utfører deretter tidsmidlingsoperasjonen i alle ledd. For trykk- og viskositetsleddet som begge er lineære i henholdsvis p og u, kan vi umiddelbart la tidsmidlingen (over tiden T) og stedsderivasjonene bytte plass. Vi har da å gjøre med

$$\frac{1}{T}\int_0^T (\overline{u} + u')d\tau = \frac{1}{T}\overline{u}T + \frac{1}{T}\int_0^T u'\, d\tau = \overline{u}$$

(tilsvarende for p), siden integralet over u' er lik 0 pr. definisjon. På høyre side av Navier-Stokes-ligningen gjenstår det da bare tidsmidlede verdier av hastighet og trykk.

Det konvektive akselerasjonsleddet, før tidsmidling:

$$(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\, u = (\overline{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla)\,\overline{u} + (\boldsymbol{u'}\cdot\nabla)\, u' + (\overline{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla)\, u' + (\boldsymbol{u'}\cdot\nabla)\,\overline{u}$$

Tredje og fjerde ledd på høyre side av denne ligningen gir 0 ved tidsmidlingen akkurat som ovenfor. Første ledd gir etter tidsmidlingen en konvektivt tidsderivert uttrykt ved middelhastighet. Annet ledd: Ut fra det vi allerede har vist under punkt a), har vi

$$(\boldsymbol{u'}\cdot\nabla)\, u' = \frac{\partial}{\partial x}(u'^2) + \frac{\partial}{\partial y}(u'v') + \frac{\partial}{\partial z}(u'w')$$

og følgelig etter tidsmidling, der derivasjon og integrasjon ombyttes nok en gang:

$$\overline{(\boldsymbol{u'}\cdot\nabla)\, u'} = \frac{\partial}{\partial x}(\overline{u'^2}) + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial z}(\overline{u'w'})$$

I Navier-Stokes-ligningen flyttes dette uttrykket over til høyre side, og vi har da gjenskapt høyre side av det ønskede uttrykket.

Gjenstående på venstre side, ved tidsmidlingen:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\partial}{\partial \tau}(\overline{u} + u')\, d\tau = \frac{1}{T}\Big|_0^T(\overline{u} + u') = \frac{1}{T}\left(\overline{u}(t+T) - \overline{u}(t)\right) + \frac{1}{T}\left(u'(t+T) - u'(t)\right)$$

Velg så T betydelig større enn typisk tidsskala for fluktuasjonene, men fremdeles liten i forhold til tidsskalaen for gjennomsnittshastighetens variasjoner.[1] Da vil første uttrykk på høyre side representere $\partial\overline{u}/\partial t$, den lokalt tidsderiverte av hastighetskomponenten i x-retning, mens annet uttrykk blir neglisjerbart på grunn av at fluktuasjonenes størrelse skal være begrenset.

Alt i alt er da Navier-Stokes-ligningen kommet over på den etterspurte formen med middelverdier, men med *korrelasjoner* mellom de fluktuerende hastighetskomponentene i tillegg.

c)
Trykkleddet i Navier-Stokes-ligningen skyldes en romlig variasjon av trykkspenninger, og danner grunnlaget for fluidstatikken. På samme måte skyldes leddene med μ en romlig variasjon av viskøse spenninger, se for eksempel definisjonsligningen for viskositet. Men sammen med den viskøse spenningen opptrer det ledd som er korrelasjoner mellom fluktuasjonsbidragene, for eksempel i

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial\overline{u}}{\partial y} - \rho\overline{u'v'}\right)$$

Disse leddene kan derfor formelt oppfattes som spenningsbidrag, der $\partial/\partial y$ projiserer ut den romlige variasjonen liksom for de viskøse bidragene. Spenningskarakteren kommer også klart fram i lærebøkenes behandling av blandingslengde og korrelasjoner.

Løsning I.9

Sett inn for ν fra definisjonsligningen for Re, og for u_* fra definisjonen (se "Formler og uttrykk"), og du har straks den ønskede sammenhengen:

$$\delta_l = 14.14\frac{D}{\mathrm{Re}\sqrt{f}}$$

Med tallverdiene innsatt:

$$\mathrm{Re} = \frac{4}{\pi}\frac{\rho Q}{D\mu} = \frac{4}{\pi}\frac{0.90\cdot 998\cdot 0.06}{0.15\cdot 0.04} = 11440$$

$$\delta_l = 14.14\frac{0.15}{11440\sqrt{0.034}} = 1.0\ \mathrm{mm}$$

Kommentar:
Re-verdier som tilsvarer turbulent strøm er en forutsetning for at uttrykket for δ_l skal være gyldig.

Løsning I.10

Sett inn:

$$\rho\kappa^2 y^2\left(\frac{du}{dy}\right)^2 = \tau_{\text{turb}} \approx \tau_0$$

$$\frac{du}{dy} = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\frac{1}{\kappa y} = \frac{u_*}{\kappa}\frac{1}{y}$$

$$u = \frac{u_*}{\kappa}\ln y + B$$

En omskriving gir det ønskede svaret, med B og C integrasjonskonstanter:

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa}\ln\frac{yu_*}{\nu} + B - \frac{1}{\kappa}\ln\frac{u_*}{\nu} = \frac{1}{\kappa}\ln\frac{yu_*}{\nu} + C$$

[1] Her kommer det inn matematiske overlegninger som vi ikke skal komme nærmere inn på.

Kommentar:
Dette uttrykket kan omformes til å gi det logaritmiske hastighetsprofilet oppgitt i avsnittet "Formler og uttrykk", som er brukt i neste oppgave.

Løsning I.11

$$\frac{e}{D} = \frac{0.00085}{0.1} = \qquad 0.0085$$

$$\mathrm{Re} = \frac{4}{\pi}\frac{\rho Q}{D\mu} = \frac{4}{\pi}\frac{0.82\cdot 998\cdot 0.04}{0.1\cdot 0.0052} = \qquad 80170$$

$$f \quad \text{(fra Moody-diagram)} \approx \qquad 0.036$$

a)
Head-tap pr. lengdeenhet:

$$\frac{h_L}{L} = \frac{8}{\pi^2} f \frac{Q^2}{gD^5} \approx \frac{8}{\pi^2} 0.036 \frac{(0.04)^2}{9.81(0.1)^5} \text{ m/m} = \qquad 0.48 \text{ m/m}$$

b)
Skjærspenning ved rørveggen:

$$\tau_0 = \frac{1}{8} f \rho V^2 = \frac{2}{\pi^2} f \rho \frac{Q^2}{V^4} \approx \frac{2}{\pi^2} 0.036\cdot 0.82\cdot 998 \frac{(0.04^2)}{(0.1)^4} \text{ N/m}^2 = \qquad 95.5 \text{ N/m}^2$$

c)
Lokal gjennomsnittlig strømhastighet i avstand 2 cm fra senterlinjen:

$$\begin{aligned} u &= \left(1 + 1.326\sqrt{f}\right) V - 2.04\sqrt{f} V \log\left(\frac{R}{R-r}\right) \\ &= \left(1 + 1.326\sqrt{0.036} - 2.04\sqrt{0.036}\log\frac{5}{5-2}\right) \frac{4}{\pi}\frac{0.04}{(0.1)^2} \text{ m/s} = \qquad 5.94 \text{ m/s} \end{aligned}$$

d)
Som man så ved avlesningen i Moody-diagrammet skulle strømmen befinne seg i overgangssonen mellom glatt og helt ru rør, men nær området med tilnærmet konstant f, dvs. nær grensen mot ru rør.

Nominell grensesjikttykkelse:

$$\delta_l = \frac{14.14 D}{\mathrm{Re}\sqrt{f}} = \frac{14.14\cdot 0.1}{80170\sqrt{0.036}} \text{m} = \qquad 0.093 \text{ mm}$$

Vi har

$$\delta_l \approx \frac{1}{9.1} e$$

som ikke oppfyller rurørsbetingelsen $\delta_l < e/14$, men i enda mindre grad glattrørsbetingelsen $\delta_l > e$. Det bekrefter at strømmen i røret ligger i overgangssonen, nær grensen for helt ru rør.

Løsning I.12

Oppgavens hovedpoeng er at vannstrømmen er turbulent, men glyserolstrømmen er laminær:

$$\mathrm{Re}_{\text{vann}} = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\rho Q}{D\mu}\right)_{\text{vann}} = \frac{4}{\pi}\frac{998\cdot 0.1}{0.6\cdot 1.307\cdot 10^{-3}} = \qquad 162100$$

$$\mathrm{Re}_{\text{glyserol}} = s_{\text{glyserol}} \frac{\mu_{\text{vann}}}{\mu_{\text{glyserol}}} \mathrm{Re}_{\text{vann}} = 1.26 \frac{0.001307}{1.494} 162100 = \qquad 178.6$$

Verdien av f er ellers det eneste som skiller mellom de to tilfellene.

a)
Friksjonsfaktor for vann:

$$f_{\text{vann}} = \frac{\pi^2}{8}\frac{gD^5}{Q^2}\frac{h_L}{L} = \frac{\pi^2}{8}\frac{9.81\cdot(0.6)^5}{(0.1)^2}0.0003 \ = \qquad 0.0282$$

b) For glyserol:

$$f_{\text{glyserol}} = \frac{64}{\text{Re}_{\text{glyserol}}} = \frac{64}{178.6} \ = \qquad 0.358$$

Glyserolens head-tap:

$$\left(\frac{h_L}{L}\right)_{\text{glyserol}} = \frac{f_{\text{glyserol}}}{f_{\text{vann}}}\left(\frac{h_L}{L}\right)_{\text{vann}} = \frac{0.358}{0.0282}0.0003\ \text{m/m} \ = \qquad 0.00381\ \text{m/m}$$

Kommentar:
Siden rørets ruhet ikke var kjent, kunne man ikke bruke Moody-diagrammet. Men etter å ha funnet f og Re for vann kan man nå gå til Moody-diagrammet og finne at det tilsvarer $e/D \approx 0.0035$, dvs. $e \approx 2$ mm.

Løsning I.13

$$\text{Re}_{26.5\text{C}} = \frac{4}{\pi}\frac{Q}{D\nu_{26.5\text{C}}} = \frac{4}{\pi}\frac{0.0006}{0.05\cdot 2\cdot 10^{-6}} \ = \qquad 7640$$

$$\text{Re}_{50\text{C}} = \text{Re}_{26.5\text{C}}\frac{\nu_{26.5\text{C}}}{\nu_{50\text{C}}} \ = \qquad 10190$$

$$\frac{e}{D} = \frac{0.0015}{50} \ = \qquad 0.00003$$

Moody-diagrammet viser at røret oppfører seg som "helt glatt" ved begge temperaturene, og vi leser av:

$$\begin{aligned} f_{26.5\text{C}} &\approx 0.0325 \\ f_{50\text{C}} &\approx 0.03 \end{aligned}$$

Head-tapet blir:

a)

$$\left(\frac{h_L}{L}\right)_{26.5\text{C}} = f\frac{1}{D}\frac{1}{2g}V^2 = \frac{8}{\pi^2}f\frac{Q^2}{gQ^5} \approx \frac{8}{\pi^2}0.0325\frac{(0.0006)^2}{9.81(0.05)^5}\ \text{m/m} \ = \qquad 3.1\ \text{mm/m}$$

b)

$$\left(\frac{h_L}{L}\right)_{50\text{C}} = \left(\frac{h_L}{L}\right)_{26.5\text{C}}\frac{f_{50\text{C}}}{f_{26.5\text{C}}} \ \approx \qquad 2.9\ \text{mm/m}$$

Løsning I.14

Legg et kontrollvolum som innesluttet alt vannet, med innløp i vannoverflaten i tanken og utløp ved enden av rør 3. Strømhastighet i røret, med tilhørende Reynoldstall:

$$V_2 = \frac{4}{\pi}\frac{Q}{d^2} = \frac{4}{\pi}\frac{0.015}{(0.05)^2}\ \text{m/s} \ = \qquad 7.64\ \text{m/s}$$

$$\text{Re} = \frac{V_2 d}{\nu} = \frac{7.64\cdot 0.05}{1.003\cdot 10^{-6}} \ = \qquad 380800$$

Fra Moody-diagrammet: $\quad f \ \approx \qquad 0.0137$

I grensen av stor vannoverflateareal i tanken lyder energiligningen

$$\frac{p_1}{\rho g} + 0 + h_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{1}{2g}V_2^2 + h_2 + h_L \qquad (h_L = f\frac{\Sigma L}{d}\frac{1}{2g}V_2^2)$$

som gir

$$\begin{aligned} p_{1g} &= p_1 - p_2 \\ &= \left(1 + f\frac{L_1 + L_2 + L_3}{d}\right)\frac{1}{2}\rho V_2^2 + \rho g(h_2 - h_1) \\ &= \left[\left(1 + 0.0137\frac{60+80+30}{0.05}\right)\frac{1}{2}998\cdot(7.64)^2 + 998\cdot 9.81\cdot(80-10)\right] \text{ N/m}^2 \\ &= [(1 + 46.58)29.13 + 685.2] \text{ kPa} \\ &= [29.1_{\text{(kinetisk)}} + 1356.8_{\text{(tap)}} + 685.2_{\text{(statisk)}}] \text{ kPa } = \qquad 2071 \text{ kPa} \end{aligned}$$

Kommentar:
Som det viser seg, går overtrykket i hovedsak med til å overvinne viskøst trykkfall langs røret, gitt ved h_L. Det er derfor logisk å anse oppgaven som en “Type 1” beregning. – Størrelsen av overtrykket tilsvarer ca. 20 atmosfærer.

Løsning I.15

Løs ut V fra uttrykket for h_L:

$$V = \sqrt{\frac{2gD}{f}\frac{h_L}{L}} = \sqrt{\frac{2\cdot 9.81\cdot 0.15}{f}\cdot\frac{0.25}{100}} \text{ m/s } = \qquad \frac{0.08576}{f^{1/2}} \text{ m/s}$$

Relativ ruhet: $\frac{e}{D} = \frac{0.00025}{0.15} =$ 0.0017

Asymptotisk f-verdi for gitt e/D: $f \approx$ 0.0223

Sammenheng mellom Re og V:

$$\text{Re} = \frac{VD}{\nu_{\text{vann,15C}}} = \frac{V\cdot 0.15}{1.139\cdot 10^{-6}}\,(\text{m/s})^{-1} = \qquad V\cdot 131700\,(\text{m/s})^{-1}$$

(Her er det underforstått at V inngår i uttrykket med benevning.)

Iterer relasjonene $V = V(f)$ og Re $=$ Re(V) med den asymptotiske verdien som startverdi, ved hjelp av Moody-diagrammet, for gitt verdi av e/D. Sløyf de underforståtte SI-enhetene i notasjonen:

It. #	1	2
f_{inn}	0.0223	0.025
V	0.574	0.542
Re	75600	71400
f_{ut}	0.025	0.025

Her har iterasjonene konvergert innenfor avlesningsnøyaktigheten i vanlige Moody-diagrammer, og vi har funnet

$$V \approx 0.542 \text{ m/s}$$

Volumetrisk strømrate:

$$Q = \frac{\pi}{4}D^2V \approx \frac{\pi}{4}(0.15)^2 0.542 \text{ m}^3/\text{s} = 34.5 \text{ m}^3/\text{h } = \qquad 9.6 \text{ l/s}$$

Løsning I.16

(Dette er nesten som forrige oppgave, bortsett fra at "hydraulisk radius" inntar den plassen som ekte diameter hadde.[2] Vi benytter anledningen til å vise en alternativ formulering av iterasjonsprosedyren, der de to relasjonene $V = V(f)$ og Re = Re(V) er erstattet med en, Re = Re(f).)

For en likesidet trekant med areal A, omkrets P og sidekant a:

$$A = \frac{1}{4}\sqrt{3}\,a^2\,, \qquad P = 3a \qquad \Rightarrow \qquad R_h = \frac{A}{P} = \frac{1}{4\sqrt{3}}a$$

Vi eliminerer V mellom uttrykkene for head-tap h_L og Reynoldstall Re, og får:

$$\frac{1}{f} = \frac{\nu^2}{2gD^3}\frac{L}{h_L}(\mathrm{Re})^2$$

Her gjør vi erstatningen

$$D \to 4R_h = \frac{1}{\sqrt{3}}a = \frac{2}{3^{3/4}}\sqrt{A}$$

og finner:

$$\mathrm{Re} = \frac{4}{3^{9/8}}\sqrt{\frac{gA^{3/2}}{\nu^2}\frac{h_L}{L}}\frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{4}{3^{9/8}}\sqrt{\frac{9.81\cdot(0.0775)^{3/2}}{(1.139\cdot 10^{-6})^2}0.02}\frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{66378}{f^{1/2}}$$

Nominell relativ ruhet:

$$\frac{e}{D} \to \frac{e}{4R_h} = \frac{3^{3/4}}{2}\frac{e}{\sqrt{A}} = \frac{3^{3/4}}{2}\frac{0.0045}{\sqrt{775}} = 0.000184$$

Iterer relasjonen Re = Re(f) ved hjelp av Moody-diagrammet, for denne verdien av e/D. Velg som startverdi $f = 0.0137$, som er asymptotisk f-verdi for ovennevnte verdi av e/D:

It. #	1	2
f_{inn}	0.0137	0.0151
Re	567100	540200
f_{ut}	0.0151	0.0151

Med dette resultatet får vi, innenfor avlesningsnøyaktigheten i Moody-diagrammet:

$$\begin{aligned} Q &= AV = \sqrt{3}A\frac{\nu}{a}\mathrm{Re} = \frac{3^{3/4}}{2}\sqrt{A}\,\nu\,\mathrm{Re} \\ &\approx \frac{3^{3/4}}{2}\sqrt{0.0775}\cdot 1.139\cdot 10^{-6}\cdot 540200\,\mathrm{m^3/s} = 195\ \mathrm{l/s} \end{aligned}$$

Løsning I.17

Legg et kontrollvolum som omfatter alt vannet, med innløp i overflaten i det høyest liggende reservoaret og utløp i overflaten av det nederste. I energiligningen vil hastighetsleddene falle ut hvis overflatene er store, og trykkleddene vil kansellere i grensen av små nivåforskjeller. Gjenværende uttrykk, med V for strømhastigheten i røret:

$$-\Delta z = h_L = f\frac{L}{D}\frac{1}{2g}V^2$$

Det fysiske innholdet i denne ligningen er at hvis strømmen er stasjonær, så vil den potensielle energien ved strøm mellom de to overflatene gå tapt som varmeenergi på grunn av friksjonen i røret. Dette blir den

[2] Det er allerede antydet annetsteds i dette løsningssettet at regning med hydraulisk radius ikke gir lett kontrollerbar og fysisk begrunnet nøyaktighet.

bestemmende betingelsen for strømhastigheten i røret.

Vi setter inn for V fra definisjonen av Reynoldstall, og finner:

$$\text{Re} = \sqrt{\frac{2g(-\Delta z)D^3}{L\nu^2}}\frac{1}{f^{1/2}} = \sqrt{\frac{2\cdot 9.81\cdot 100(0.04)^3}{4500(1.003\cdot 10^{-6})^2}}\frac{1}{f^{1/2}} = \frac{5266}{f^{1/2}}$$

Iterer denne relasjonen ved hjelp av Moody-diagrammet. Med antagelse om glatt rør er det ikke noen asymptotisk verdi å velge for f, men vi kan prøve startverdien $f = 0.015$, som er omtrent midt i diagrammet for et glatt rør:

It. #	1	2	3	4
f_{inn}	0.015	0.0213	0.022	0.0222
Re	43000	36100	35500	35300
f_{ut}	0.0215	0.022	0.0222	0.0222

Her har iterasjonene konvergert med omtrent den nøyaktigheten vi kan forlange "på øyemål" fra Moody-diagrammet. Volumstrømraten blir:

$$Q = \frac{\pi}{4}D^2V = \frac{\pi}{4}D\nu\,\text{Re}$$
$$\approx \frac{\pi}{4}0.04\cdot 1.003\cdot 10^{-6}\cdot 35300\,\text{m}^3/\text{s} = 4.0\,\text{m}^3/\text{h}$$

Løsning I.18

Vi legger inn et kontrollvolum som beskrevet i løsningen av forrige oppgave. Energiligningen reduserer seg til samme uttrykk som der. Rørdiameteren D er nå ukjent.

Den reduserte energiligningen omskrives til en sammenheng mellom D og f, der V er uttrykt ved Q. Det er hensiktsmessig å innføre en referanseverdi for diameteren når tallverdier blir satt inn:

$$D^5 = \frac{16}{\pi^2}\frac{LQ^2}{2g(-\Delta z)}f$$

$$\frac{D}{0.1\,\text{m}} = \left(\frac{16}{\pi^2}\frac{4500(0.3)^2}{2\cdot 9.81\cdot 80\cdot (0.1)^{1/5}}\right)^{1/5} f^{1/5} = 8.401 f^{1/5}$$

Samme referanseverdi brukes i uttrykket for relativ ruhet:

$$\frac{e}{D} = \frac{0.00006}{0.1}\left(\frac{0.1\,\text{m}}{D}\right) = 0.0006\left(\frac{0.1\,\text{m}}{D}\right)$$

Reynoldstallet vil også være gitt ved den ukjente (men skalerte) diameteren:

$$\text{Re} = \frac{4}{\pi}\frac{Q}{D\nu} = \frac{4}{\pi}\frac{0.3}{0.1\cdot 6\cdot 10^{-5}}\left(\frac{0.1\,\text{m}}{D}\right) = 63662\left(\frac{0.1\,\text{m}}{D}\right)$$

Relasjonene $D = D(f)$ og $\text{Re} = \text{Re}(D)$ itereres nå sammen med Moody-diagrammet. Ved avlesningen i diagrammet må vi interpolere mellom kurvene for å få aktuell $e/D = (e/D)(D)$. Prøv startverdien $f = 0.02$, noenlunde midt i diagrammet for lave verdier av e/D:

It. #	1	2	3	4
f_{inn}	0.02	0.0274	0.0278	0.0279
$D/(0.1\,\text{m})$	3.84	4.09	4.10	4.11
e/D	0.00016	0.00015	0.00015	0.00015
Re	16580	15570	15530	15490
f_{ut}	0.0287	0.0278	0.0279	0.00279

Resultat: Som rør til formålet kan velges den minste kommersielle størrelsen med

$$D_{\text{indre}} > D_{\text{nominell}} \approx 0.411\ \text{m}$$

– eller større, avhengig av behov og prosjektets økonomi.

Kommentar:
Det er vanskelig å få nøyaktige avlesninger i Moody-diagrammet for de gitte parameterverdiene. I iterasjonene bør du derfor "jukse" ved å sjekke avlesningene mot verdier du finner fra Colebrooks ligning, som Moody-diagrammet bygger på – liksom nedskriveren av disse løsningene gjorde.

Løsning I.19

De "små" tapene er gitt ved

$$(h_L)_{\text{små}} = (k_e + k_{sd})\frac{V^2}{2g}$$

der k_e er tapskoeffisienten for innløpet, og $k_{sd} = 1$ er tapskoeffisienten for et neddykket utløp (hele den kinetiske energien går tapt der). Det spiller ikke noen rolle hvordan betingelsene ved rørutløpet er.

Forholdet mellom tapene er

$$R = \frac{(h_L)_{\text{små}}}{h_L} = \frac{k_e + k_{sd}}{f}\frac{D}{L} = \frac{0.5+1}{0.02}\frac{D}{L} = 75\frac{D}{L}$$

a) $L = 1.5\ \text{m} \quad \Rightarrow \quad R = 15$

b) $L = 30\ \text{m} \quad \Rightarrow \quad R = 0.75$

c) $L = 600\ \text{m} \quad \Rightarrow \quad R = 0.0375$

Kommentar:
Eksemplet antyder at i mange praktiske sammenhenger bør L/D være av størrelsesorden 1000 eller mer, før de "små" tapene kan betraktes som uviktige. Forøvrig var opplysningen om strømhastighet overflødig.

Løsning I.20

Bruk energiligningen, og anta lagt et kontrollvolum med innløp i bassengoverflaten og utløp i dyseåpningen. La V_2 og V_3 være henholdsvis rørstrømshastigheten og strålehastigheten. I grensen av stor bassengoverflate og liten nivåforskjell mellom innløp og utløp reduserer ligningen seg til

$$\frac{1}{2g}V_3^2 = -\Delta z - (h_L)_{\text{tot}}$$

med utløpshastigheten relatert til rørstrømshastigheten via kontinuitetsligningen

$$V_2 = \left(\frac{d}{D}\right)^2 V_3$$

Totalt head-tap blir summen av bidragene fra h_L for røret og de "små" bidragene ved innløp og utløp:

$$(h_L)_{\text{tot}} = k_e\frac{1}{2g}V_2^2 + f\frac{L}{D}\frac{1}{2g}V_2^2 + k_d\frac{1}{2g}V_3^2$$

Tilsammen gir dette:

$$\frac{1}{2g}V_3^2\left\{1 + k_d + \left(k_e + f\frac{L}{D}\right)\left(\frac{d}{D}\right)^4\right\} = -\Delta z$$

Effekten i strålen, uttrykt ved head-bidraget h_{kin} for kinetisk energi pr. vektenhet:

$$\begin{aligned} P &= h_{\text{kin}}\rho g Q \\ &= \frac{1}{2g}V_3^2\rho g\frac{\pi}{4}d^2V_3 \\ &= \frac{\pi}{4}\sqrt{2g}\rho g d^2\frac{V_3^{3/2}}{(2g)^{3/2}} \\ &= \frac{\pi}{4}\sqrt{2g}\rho g D^2(-\Delta z)^{3/2}\frac{x^2}{\left[1+k_d+\left(k_e+f\dfrac{L}{D}\right)x^4\right]^{3/2}} \qquad (x=\frac{d}{D}) \end{aligned}$$

a)
Ved maksimal effekt er $dP/dx = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\frac{x^2}{\left[1+k_d+\left(k_e+f\dfrac{L}{D}\right)x^4\right]^{3/2}} &= 0 \\ 2x[\,]^{3/2} - x^2\frac{3}{2}[\,]^{1/2}\,4(k_e+f\frac{L}{D}x^3) &= 0 \\ 1+k_d+\left(k_e+f\frac{L}{D}\right)x^4 - 3\left(k_e+f\frac{L}{D}\right)x^4 &= 0 \end{aligned}$$

Det vil si:

$$x = x_{\text{opt}} = \left(\frac{1}{2}\frac{1+k_d}{k_e+f\dfrac{L}{D}}\right)^{1/4}$$

Optimal dyseutløpsdiameter:

$$d_{\text{opt}} = x_{\text{opt}}D = \left(\frac{1}{2}\frac{1+0.05}{0.5+0.025\dfrac{180}{0.2}}\right)^{1/4} 0.20\ \text{m} = \qquad 7.8\ \text{cm}$$

b)
Maksimal stråleeffekt: Med $x = x_{\text{opt}}$ innsatt i uttrykket for P får vi

$$P_{\max} = \frac{\pi}{4}\sqrt{2g}\rho g D^2\sqrt{\frac{1}{2}\frac{1+k_d}{k_e+f\dfrac{L}{D}}}\left[\frac{(-\Delta z)^{3/2}}{1+k_d+\dfrac{1}{2}(1+k_d)}\right]^{3/2} = \frac{\pi}{12\sqrt{3}}\frac{\rho D^2(-2g\Delta z)^{3/2}}{(1+k_d)\sqrt{k_e+f\dfrac{L}{D}}}$$

Med innsatte parameterverdier:

$$P_{\max} = \frac{\pi}{12\sqrt{3}}\frac{998\cdot(0.2)^2(2\cdot 9.81\cdot 15)^{3/2}}{(1+0.05)\sqrt{0.5+0.025\dfrac{180}{0.2}}}\ \text{Nm/s} = \qquad 6.05\ \text{kW}$$

Kommentar:
Interessert i om antagelsen om konstant f er god ved de gitte parameterverdiene? Finn hastigheten i røret:

$$V_2 = \left(\frac{d}{D}\right)^2\frac{\sqrt{-2g\Delta z}}{\sqrt{1+k_d+\left(k_e+f\dfrac{L}{D}\right)\left(\dfrac{d}{D}\right)^4}} = \qquad 2.07\ \text{m/s}$$

Tilhørende Reynoldstall:[3]

$$\text{Re} = \frac{\rho V_2 D}{\mu} \approx \frac{998\cdot 2.07\cdot 0.2}{1.002\cdot 10^{-3}} = \qquad 413200$$

Et blikk i Moodydiagrammet viser at denne (Re, f)-kombinasjonen ligger på grensen av det asymptotiske området med konstant f. Men mot lavere Re-verdier må P avta på grunn av lavere h_P og Q samtidig (f er en langsomt varierende funksjon av hastigheten), og for høyere Re-verdier er antagelsen om konstant f god. Verdien for d_{opt} som ble funnet under antagelse om konstant f, bør derfor være et hensiktsmessig overslag.

Løsning I.21

Legg et kontrollvolum med innløp i bassengoverflaten og utløp i røråpningen mot fri luft. La indeks 1 og 2 referere til henholdsvis bassengoverflaten og røråpningen, og la V_2 og h_L i den følgende regningen stå for verdier *uten* pumpe selv *etter at* en pumpe er satt inn. I grensen av stort bassengoverflateareal og liten nivåforskjell mellom inn- og utløp (neglisjerbar trykkvariasjon) reduserer energiligningen seg til

$$z_1 = \frac{1}{2g}V_2^2 + z_2 + h_L$$

h_L er som kjent en kvadratisk funksjon av hastigheten, i approksimasjonen hvor f antas å være konstant. Når V_2 øker med en faktor n ved pumpeinnsettingen, må derfor energiligningen ovenfor avløses av uttrykket

$$z_1 + h_P = \frac{1}{2g}n^2V_2^2 + z_2 + n^2 h_L$$

hvor – som ovenfor nevnt – V_2 og h_L står for størrelsene *uten* pumpe.

a)
Multipliser første ligning med $(-n^2)$ og adder den til den andre. V_2^2 og h_L faller ut, og et uttrykk for h_P framkommer:

$$h_P = -(n^2-1)(z_2-z_1)$$

b)
Første ligning gir, etter innsetting for h_L:

$$V_2 = \sqrt{\frac{-2g(z_2-z_1)}{1+f\dfrac{L}{D}}} = \sqrt{\frac{2\cdot 9.81\cdot 4.5}{1+0.038\dfrac{3000}{0.3}}}\ \text{m/s} = \qquad 0.48\ \text{m/s}$$

I uttrykket for effekten må imidlertid nV_2 settes inn, fordi det er betingelsen med pumpe installert:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{\eta}\rho g Q h_P \\ &= \frac{\pi}{8}n(n^2-1)\frac{1}{\eta}\rho D^2 \frac{[-2g(z_2-z_1)]^{3/2}}{\sqrt{1+f\dfrac{L}{D}}} \\ &= \frac{\pi}{8}2(2^2-1)\frac{1}{0.7}998(0.3)^2\frac{(2\cdot 9.81\cdot 4.5)^{3/2}}{\sqrt{1+0.038\dfrac{3000}{0.3}}}\ \text{Nm/s} = \qquad 12.85\ \text{kW} \end{aligned}$$

Kommentar:

[3]Verdier for vann ved 20 $^{\text{o}}$C er brukt, noe som vel ikke er realistisk i praksis, men det er godt nok for et overslag.

Resultatet for h_P føyer seg pent inn i rekken av "fantastiske forenklinger" som kan inntreffe når man tillater seg å regne algebraisk! Head tilført fra pumpen tilsvarer den ekstra høydedifferansen man ellers måtte ha hatt for å n-doble strømraten.

Hva med antagelsen om konstant f? Sjekk Reynoldstallet uten pumpe:

$$\text{Re} = \frac{\rho V_2 D}{\mu} \approx \frac{998\cdot 0.48\cdot 0.3}{1.002\cdot 10^{-3}} = 143500$$

Moodydiagrammet viser "på øyemål" at denne kombinasjonen av Reynoldstall og friksjonsfaktor er essensielt i det asymptotiske rustrømregimet med konstant f. Det er snakk om å øke V_2 slik at man kommer lenger inn i det asymptotiske området. Approksimasjonen med konstant f burde derfor være gyldig.[4]

Løsning I.22

I energiligningen kan man fritt addere ett og samme vilkårlige nivåbidrag på begge sider samtidig, og det samme gjelder for trykkene, selv om ligningen strengt tatt skal inneholde trykk og nivåer i selve strømmen. Trykkene må imidlertid reduseres til ett og samme nivå. Gaugetrykket på innløpssiden som inngår i energiligningen blir da, redusert til nivået for måleren på utløpssiden:

$$p_{1\text{g}} = s_{\text{Hg}}\rho_{\text{vann}} g \tilde{h}_{1\text{g}} - \rho_{\text{vann}} g \Delta z$$

Med denne relasjonen, samt kontinuitetsligningen

$$V_1 = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 V_2$$

kan vi redusere energiligningen til

$$\begin{aligned} h_P &= \frac{1}{2g}(V_2^2 - V_1^2) + \frac{p_2}{\rho_{\text{vann}} g} - \frac{p_1}{\rho_{\text{vann}} g} \\ &= \frac{8}{\pi^2}\frac{Q^2}{gD_2^4}\left(1 - \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4\right) + \frac{p_{2\text{g}}}{\rho_{\text{vann}} g} - s_{\text{Hg}}\tilde{h}_{1\text{g}} + \Delta z \end{aligned}$$

Effekt levert til vannet:

$$\begin{aligned} P &= \rho_{\text{vann}} g Q h_P \\ &= \rho_{\text{vann}} g Q \left[\frac{8}{\pi^2}\frac{Q^2}{gD_2^4}\left(1 - \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^4\right) + \frac{p_{2\text{g}}}{\rho_{\text{vann}} g} - s_{\text{Hg}}\tilde{h}_{1\text{g}} + \Delta z\right] \\ &= 998\cdot 9.81\cdot 0.035 \left[\frac{8}{\pi^2}\frac{(0.035)^2}{9.81(0.075)^4}\left(1 - \left(\frac{7.5}{10}\right)^4\right) \right. \\ &\qquad \left. + \frac{175\cdot 10^3}{998\cdot 9.81} - 13.56\cdot(-0.25) + 0.60\right] \text{ Nm/s} = 8.24\,\text{kW} \end{aligned}$$

Kommentar:
Dette resultatet skal multipliseres med $1/\eta$ hvis man er interessert i effekten som må tilføres til pumpen.

Løsning I.23

Noter først at Colebrook-formelens struktur er slik at den kan kombineres med definisjonsligningen for head-tap, til å gi volumstrømrate Q som en *eksplisitt* funksjon av head-tap h_L for et rør:

$$Q = \frac{\pi}{4} D^2 V$$

[4] I enkelte lærebøker finnes en variant av denne oppgaven med en lavere f-verdi oppgitt. Det medfører, som man selv kan sjekke, at antagelsen om konstant f kan bli mindre god. – Forøvrig har vi i dette Re-overslaget, liksom i forrige oppgave, regnet med en høyere temperatur enn hva man ofte møter på nordlige breddegrader, uten at det spiller noen stor rolle for gyldigheten av overslaget.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{4} D^2 \sqrt{\frac{2gDh_L}{L}} \frac{1}{\sqrt{f}} \\
&= -\frac{\pi}{2} D^2 \sqrt{\frac{2gDh_L}{L}} \log\left(\frac{e/D}{3.7} + \frac{2.51}{\mathrm{Re}\sqrt{f}}\right) \\
&= -\frac{\pi}{2} D^2 \sqrt{\frac{2gDh_L}{L}} \log\left(\frac{e/D}{3.7} + \frac{2.51\nu}{D}\sqrt{\frac{L}{2gDh_L}}\right)
\end{aligned}
$$

Ved stasjonær strøm er head-tapet for hvert rør lik overflatenivåforskjellen, når "små" tap blir sett bort fra. Dette gir opphav til en spesielt enkel løsningsmetode for strømratene, basert på bruk av $Q = Q(h_L)$:

Med en antatt verdi for overflatenivået i stigerøret, kan man beregne

$$\Sigma Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

der Q_i er strømraten i rør i, regnet algebraisk med retning mot det felles rørknutepunktet. Finn ved prøving/feiling/ekstrapolasjon den verdien av overflatenivået i stigerøret som gir $\Sigma Q = 0$!

Med z_0 og z_i for henholdsvis stigerørsnivået og overflatenivået i basseng i, definerer vi

$$\Delta z_i = z_0 - z_i$$

og har da

$$Q_i = \mathrm{sgn}(\Delta z_i)\, \frac{\pi}{2} D^2 \sqrt{\frac{2gD\,|\Delta z_i|}{L}} \log\left(\frac{e/D}{3.7} + \frac{2.51\nu}{D}\sqrt{\frac{L}{2gD\,|\Delta z_i|}}\right)$$

Når tallverdier settes inn er det nyttig å innføre en referanseverdi for nivåforskjellene for å spare arbeid:

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= \mathrm{sgn}(\Delta z_1)\, 0.204480 \sqrt{\frac{|\Delta z_1|}{10\,\mathrm{m}}} \log\left(2.07207 \cdot 10^{-5} + 1.16036 \cdot 10^{-5} \sqrt{\frac{10\,\mathrm{m}}{|\Delta z_1|}}\right) \mathrm{m^3/s} \\
Q_2 &= \mathrm{sgn}(\Delta z_2)\, 0.172530 \sqrt{\frac{|\Delta z_2|}{10\,\mathrm{m}}} \log\left(2.76276 \cdot 10^{-5} + 1.03143 \cdot 10^{-5} \sqrt{\frac{10\,\mathrm{m}}{|\Delta z_2|}}\right) \mathrm{m^3/s} \\
Q_3 &= \mathrm{sgn}(\Delta z_3)\, 0.064262 \sqrt{\frac{|\Delta z_3|}{10\,\mathrm{m}}} \log\left(3.10811 \cdot 10^{-5} + 2.46150 \cdot 10^{-5} \sqrt{\frac{10\,\mathrm{m}}{|\Delta z_3|}}\right) \mathrm{m^3/s}
\end{aligned}
$$

a)
Anta først $Q_2 = 0$, slik at stigerørsnivået er lik nivået for basseng 2:

$$\Delta z_1 = -12\,\mathrm{m} \qquad \Delta z_2 = 0\,\mathrm{m} \qquad \Delta z_3 = 18\,\mathrm{m}$$

Det gir:

$$Q_1 = 1.009\,\mathrm{m^3/s} \qquad Q_3 = -0.371\,\mathrm{m^3/s} \qquad Q_1 + Q_3 > 0$$

Siden $Q_1 + Q_3 > 0$ ville det medføre at vann måtte strømme til basseng 2 for at kontinuitetsligningen ($\Sigma Q = 0$) skal være oppfylt, og da må stigerørsnivået være høyere enn nivået i basseng 2. Strømretningen er derfor *til* basseng 2.

b)
Finn stigerørsnivået som gir $\Sigma Q = 0$: Prøv for eksempel først $\Delta z_1 = 0$, deretter middelverdien av nivåene til basseng 1 og 2, osv. Med SI-benevningene sløyfet:

z_0	Δz_1	Δz_2	Δz_3	Q_1	Q_2	Q_3	ΣQ
18	-12	0	18	1.009	0	-0.371	0.638
30	0	12	30	0	-0.838	-0.484	-1.321
24	-6	6	24	0.704	-0.586	-0.431	-0.313
22	-8	4	22	0.818	-0.475	-0.412	-0.069
21.7	-8.3	3.7	21.7	0.834	-0.457	-0.409	-0.032
21.5	-8.5	3.5	21.5	0.844	-0.444	-0.407	-0.007

Dette har konvergert bra nok. Vi har funnet:

$$
\begin{aligned}
Q_1 &\approx 0.85\ \mathrm{m^3/s} \\
Q_2 &\approx -0.44\ \mathrm{m^3/s} \\
Q_3 &\approx -0.41\ \mathrm{m^3/s}
\end{aligned}
$$

Kommentar:
En oppgave av denne typen kalles ofte “det klassiske 3-reservoar-problemet”. Hele løsningsprosedyren kan automatiseres ved hjelp av for eksempel Maple, Matlab eller Mathematica.

Løsning I.24

Bernoullis ligning med tapsledd, langs en strømlinje fra bassengoverflaten til rørutløpet, reduserer seg til:

$$\frac{1}{2g}V_B^2 = -(\Delta z)_{\text{tot}} - h_L$$

Totalt head-tap h_L er summen av tapsverdiene langs strømlinjen fra bassengoverflaten til rørutløpet. Med hastigheter V_A og V_B i henholdsvis første og annet rør:

$$h_L = k_e \frac{1}{2g}V_A^2 + f_A \frac{L_A}{D_A}\frac{1}{2g}V_A^2 + k_c \frac{1}{2g}V_B^2 + f_B \frac{L_B}{D_B}\frac{1}{2g}V_B^2$$

Her kan kontinuitetsligningen

$$V_A D_A^2 = V_B D_B^2$$

brukes til å relatere hastighetene til hverandre. De tre ligningene gir tilsammen:

$$\frac{1}{2g}V_B^2 \left\{ 1 + k_c + k_e \left(\frac{D_B}{D_A}\right)^4 + f_B \frac{L_B}{D_B} + f_A \frac{L_A}{D_A}\left(\frac{D_B}{D_A}\right)^4 \right\} = -(\Delta z)_{\text{tot}}$$

a)
Volumstrømraten:

$$
\begin{aligned}
Q &= \tfrac{\pi}{4} D_B^2 V_B^2 \\
&= \tfrac{\pi}{4} D_B^2 \sqrt{\frac{-2g(-\Delta z)_{\text{tot}}}{1 + k_c + k_e \left(\frac{D_B}{D_A}\right)^4 + f_B \frac{L_B}{D_B} + f_A \frac{L_A}{D_A}\left(\frac{D_B}{D_A}\right)^4}} \\
&= \tfrac{\pi}{4}(0.2)^2 \sqrt{\frac{2\cdot 9.81\cdot 45}{1 + 0.24 + 0.8\left(\frac{0.2}{0.3}\right)^4 + 0.04\frac{90}{0.2} + 0.04\frac{150}{0.3}\left(\frac{0.2}{0.3}\right)^4}}\ \mathrm{m^3/s} \\
&= 0.03142\sqrt{\frac{882.6}{23.35}}\ \mathrm{m^3/s} = 0.193\ \mathrm{m^3/s}
\end{aligned}
$$

b)
Bruk Bernoulli igjen, nå fra et punkt like nedstrøms for rørskjøten til et punkt i rørutløpet:

$$\frac{p_3'}{\rho g} + \frac{1}{2g}V_B^2 + z_3 = \frac{p_{\text{atm}}}{\rho g} + \frac{1}{2g}V_B^2 + z_2 + h_{L2}$$

$$\begin{aligned}(p_3')_{\text{gauge}} &= \rho g\left(z_2 - z_3 + f_B\frac{L_B}{D_B}\frac{1}{2g}V_B^2\right)\\ &= 998.2\cdot 9.81\left(-45-(-35)+0.04\frac{90}{0.2}\frac{1}{2\cdot 9.81}(6.148)^2\right)\ \text{N/m}^2\ = \qquad 241.7\ \text{kPa}\end{aligned}$$

c)
Bruk Bernoullis ligning med tapsledd mellom et punkt like oppstrøms for skjøten og et punkt like nedstrøms for å finne trykkfallet over skjøten:

$$\frac{p_3}{\rho g} + \frac{1}{2g}V_A^2 + z_3 = \frac{p_3'}{\rho g} + \frac{1}{2g}V_B^2 + z_3 + h_{Lc} \qquad (h_{Lc} = k_c\frac{1}{2g}V_B^2)$$

Trykkfallet blir:

$$\begin{aligned}p_3' - p_3 &= -\tfrac{1}{2}\rho\left(1 + k_c - \left(\frac{D_B}{D_A}\right)^4\right)\\ &= -\tfrac{1}{2}998.2\left(1 + 0.24 - \left(\frac{0.2}{0.3}\right)^4\right)(6.148)^2\ \text{N/m}^2\ = \qquad -19.7\ \text{kPa}\end{aligned}$$

Kommentar:
I uttrykket for head-tap under punkt a) hadde vi allerede benyttet opplysningen om at $D_B < D_A$, i og med den formen på tapsbidraget ved skjøten som ble brukt (ved tverrsnittsøkning skulle den kvadrerte hastighets*differansen* inngått i stedet). – Du kan sjekke at Reynoldstallet er av størrelsesorden $6\cdot 10^5$ i rør A og 10^6 i rør B. Med $f \approx 0.04$ er man for begge Re-verdiene i området hvor røret oppfører seg som "helt ru". For å få konsistens må man derfor kreve at ruheten er proporsjonal med diameteren for begge rørlengdene, hvis de skal ha essensielt samme tallverdi for f.

Løsning I.25

Betrakt en strømlinje gjennom det ene røret fra vannoverflate til vannoverflate, og deretter en tilsvarende gjennom det andre røret. Anta Bernoullis ligning med tapsledd anvendt mellom endepunktene på begge strømlinjene. I approksimasjonen hvor hastigheter er neglisjerbare (store overflatearealer) og absolutt trykk det samme ved begge basengoverflatene reduserer ligningene seg til:

$$h_{L,A} = f_A\frac{L}{D_A}\frac{1}{2g}V_A^2 = -\Delta z$$

$$h_{L,B} = f_B\frac{L}{D_B}\frac{1}{2g}V_B^2 = -\Delta z$$

Det medfører

$$\left(\frac{V_A}{V_B}\right)^2 = \frac{F_B}{F_A}\frac{D_A}{D_B}$$

og

$$\frac{Q_A}{Q_B} = \frac{V_A}{V_B}\frac{A_A}{A_B} = \frac{V_A}{V_B}\frac{D_A^2}{D_B^2}\ = \qquad n^{5/2}\sqrt{\frac{f_B}{f_A}}$$

Kommentar:
Poenget er at det blir samme verdi for head-tapet gjennom rørene, med de approksimasjonene som er brukt. Et generelt trekk ved strøm gjennom rør koplet i parallell.

Løsning I.26

a)
Legg et kontrollvolum med innløp ved O og utløp i fri luft ved D. Med de vanlige approksimasjonene reduserer energiligningen seg til

$$z_O - z_D = \frac{1}{2g}V_4^2 + \Sigma_i h_{Li} \qquad (i = 1, 2, 4 \text{ eller } 1, 3, 4)$$

med

$$h_{Li} = f_i \frac{L_i}{D_i}\frac{1}{2g}V_i^2$$

Hovedpoenget med oppgaven er at i parallellkoplingen av rør 2 og 3 er head-tapet det samme for begge:

$$f_2 \frac{L_2}{D_2}\frac{1}{2g}V_2^2 = f_3 \frac{L_3}{D_3}\frac{1}{2g}V_3^2$$

$$V_3 = \sqrt{\frac{f_2}{f_3}\frac{L_2}{L_3}\frac{D_3}{D_2}}V_2 = \sqrt{\frac{0.020}{0.025}\cdot\frac{400}{300}\cdot\frac{0.15}{0.10}}V_2 = 1.2649V_2$$

Kontinuitetsbetingelsen gir:

$$V_1 = \left(\frac{D_4}{D_1}\right)^2 V_4 = \left(\frac{0.30}{0.20}\right)^2 V_4 = 2.25V_4$$

Anvendt en gang til:

$$Q_2 + Q_3 = Q_4$$
$$D_2^2V_2 + D_3^2V_3 = D_4^2V_4$$

$$\begin{aligned} V_2 &= \left(\frac{D_4}{D_2}\right)^2 \frac{1}{1 + \left(\frac{D_3}{D_2}\right)^2 \sqrt{\frac{f_2}{f_3}\frac{L_2}{L_3}\frac{D_3}{D_2}}} V_4 \\ &= \left(\frac{0.30}{0.10}\right)^2 \frac{1}{1 + \left(\frac{0.15}{0.10}\right)^2 1.2649} V_4 \\ &= 2.34006V_4 \end{aligned}$$

Innsatt i energiligningen:

$$z_O - z_D = \left(1 + f_1\frac{L_1}{D_1}\left(\frac{V_1}{V_4}\right)^2 + f_2\frac{L_2}{D_2}\left(\frac{V_2}{V_4}\right)^2 + f_4\frac{L_4}{D_4}\right)\frac{1}{2g}V_4^2$$

$$V_4 = \sqrt{\frac{2\cdot 9.81\cdot(100-15)}{\left(1 + 0.03\frac{500}{0.20}(2.25)^2 + 0.02\frac{400}{0.10}(2.34)^2 + 0.018\frac{800}{0.30}\right)}}\ \text{m/s} \ = \qquad 1.3869\ \text{m/s}$$

Volumstrømratene:

$$Q_1 = Q_4 = \tfrac{\pi}{4}D_4^2V_4 = \tfrac{\pi}{4}(0.30)^2 1.3869\ \text{m}^3\text{/s} \ = \qquad 0.0980\ \text{m}^3\text{/s}$$

$$Q_2 = \tfrac{\pi}{4}D_2^2V_2 = \tfrac{\pi}{4}(0.10)^2 1.3869\cdot 2.340\ \text{m}^3\text{/s} \ = \qquad 0.0255\ \text{m}^3\text{/s}$$

$$Q_3 = Q_4 - Q_2 = (0.0980 - 0.0255)\ \text{m}^3/\text{s} \ = \qquad 0.0725\ \text{m}^3/\text{s}$$

b)
Legg et kontrollvolum med innløp ved O og utløp ved B. Energiligningen gir:

$$\begin{aligned} p_{Bg} &= p_B - p_O \\ &= \rho_{\text{vann}} g \left[z_O - z_B - \left(1 + f_1 \frac{L_1}{D_1}\right) \frac{1}{2g} V_1^2 \right] \\ &= 998 \cdot 9.81 \left[100 - 50 - \left(1 + 0.03 \frac{500}{0.20}\right) \frac{1}{2 \cdot 9.81} (2.25)^2 (1.3869)^2 \right] \text{ Pa } = \qquad 120.1\ \text{kPa} \end{aligned}$$

Legg så et kontrollvolum med innløp like etter C og utløp ved D. I energiligningen kansellerer de kinetiske energileddene, og vi får:

$$\begin{aligned} p_{Cg} &= p_C - p_D \\ &= \rho_{\text{vann}} g [z_D - z_C + f_4 \frac{L_4}{D_4} \frac{z_O - z_D}{1 + \Sigma_{\text{i=1,2,4}} f_i \frac{L_i}{D_i} \left(\frac{V_i}{V_4}\right)^2}] \\ &= 998 \cdot 9.81 [15 - 40 + 0.018 \frac{800}{0.30} \frac{1}{2 \cdot 9.81} (1.3869)^2] \text{ Pa } = \qquad -198.6\ \text{kPa} \end{aligned}$$

Kommentar:
Sitter studenten med en følelse av at det er noe som ikke stemmer? Ganske riktig. Verdien funnet for p_{Cg} tilsvarer et absolutt trykk lavere enn for det tomme rom. Det vil inntreffe *kavitasjon* i rørledningen hvis parameterverdiene er slik som spesifisert i oppgaveteksten. Det vil saktens komme vann ut av rørledningen ved D, men med en annen rate enn den vi har funnet! Grunnlaget for bruk av energiligningen slik vi viste er falt bort, og en mer detaljert beregningsmåte ville være nødvendig for å få et pålitelig resultat.

Parameterverdiene er tatt fra en oppgave i en eldre utgave av en lærebok. Vi kan derfor avslutte løsningssamlingen med en nyttig formaning: Stol ikke ubegrunnet på lærebøker, løsningssamlinger o.l., men sett deg inn i bakgrunnen for regningene, gjør deg opp din egen mening og finn din egen løsning.