Universitetet i Stavanger

DET TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET

EKSAMEN I: BIT370 Innføring i kvantemekanikk **DATO:** 17. desember 2013

TID FOR EKSAMEN: kl. 09.00-12.00 (3 timer)

TILLATTE HJELPEMIDDEL: Bestemt, enkel kalkulator (kode C)
Valgfri standard formelsamling
(f. eks. Rottmanns eller Knutsens)

OPPGAVESETTET BESTÅR AV 3 OPPGAVER, PÅ 3 SIDER INKL. DENNE FORSIDA

MERKNADER: —

OPPGITT: (Man skal vite hva uttrykkene står for)

$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi \qquad \cos y = \frac{1}{2}\left(e^{iy} + e^{-iy}\right)$

$\psi_{nlm_l}(r,\theta,\phi) = R_{nl}(r)Y_l^{m_l}(\theta,\phi)\ , \qquad E = -\frac{\mu e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 2\hbar^2}\frac{1}{n^2} = -13.6\ \text{eV}\ \frac{1}{n^2}$ (H-atom)

$n = 1, 2, 3, \ldots, \qquad l \leq n-1$ (H-atom)

$m_j = -j, -j+1, \ldots, 0, \ldots j-1, j$ (z-komponenter generelt, også for $j \to l$ og $j \to s$)

$j = |l-s|, |l-s|+1, \ldots, l+s-1, l+s$ (totaldreieimpuls)

$L_\pm = \hbar e^{\pm i\phi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$

$S_\pm = S_x \pm iS_y\ , \qquad S_i = \frac{1}{2}\hbar\sigma_i \qquad (i = x, y, z)$

$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad |\uparrow> \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\downarrow> \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$P = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\ , \qquad X = x$

$|\rightarrow> \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

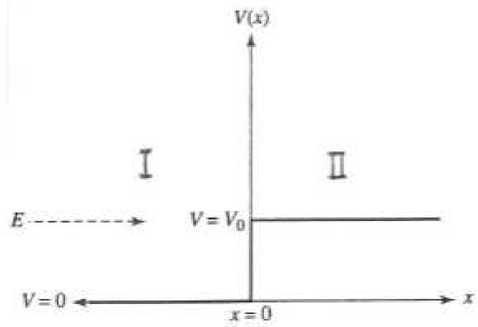
$(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = x_1^* y_1 + x_2^* y_2 + \ldots + x_n^* y_n$

$P = |<\mathrm{f}|\mathrm{i}>|^2$ (sannsynlighet, i for begynnelsestilstand, f for sluttilstand)

Oppgave 1

En partikkel med energi E og masse m beveger seg endimensjonalt fra venstre mot høyre. Ved $x = 0$ treffer den et potensialtrinn med høyde V_0 eksakt lik partikkelens innkommende energi E (altså $E = V_0$):

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \quad \text{(I)} \\ V_0 & x \geq 0 \quad \text{(II)} \end{cases}$$



Du får oppgitt at bølgefunksjonene i områdene I og II er gitt ved

$$\psi_{\mathrm{I}} = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} \qquad (k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar})$$
$$\psi_{\mathrm{II}} = C + Dx$$

a) Vis ved innsetting i den tidsuavhengige Schrödingerlikninga at ψ_{I} og ψ_{II} er gyldige løsninger.

b) Bruk et fysisk krav til ψ for $x \to \infty$ i område II til å bestemme integrasjonskonstanten D. Bruk så kontinuitetskravet på $d\psi/dx$ ved grensen mellom områdene I og II til å uttrykke en av integrasjonskonstantene i ψ_{I} ved den andre. Og bruk til slutt kontinuitetskravet på ψ ved grensen til å uttrykke ψ_{I} og ψ_{II} ved en gjenværende konstant (for eksempel C). Vis regninga.

c) Regn ut verdien av refleksjonskoeffisienten $R = (B^*B)/(A^*A)$. Hva er den prosentvise sannsynligheten for at partikkelen blir kastet tilbake fra potensialtrinnet?

d) En mer konsistent regning med $E > V_0$ som i læreboka side 71/72, ville gitt at (det skal du ikke utlede)

$$A = \frac{1}{2}C\sqrt{1 + \frac{k_2}{k_1}}\,, \qquad B = \frac{1}{2}C\sqrt{1 - \frac{k_2}{k_1}} \qquad (k_2 = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar})$$

Hvordan stemmer våre resultater for ψ_{I} ovenfor med grenseverdiene for disse uttrykkene for A og B, når E der nærmer seg V_0 ovenfra?[1]

[1]Til etterretning for de nysgjerrige: – Regninga ville dessuten gi en antydning om i hvilken forstand ψ_{II} er normaliserbar. Men det er ikke meningen at du skal filosofere over *dette* akkurat her på eksamen, heller ikke over at resultatet du fant for ψ_{I} beskriver en stående bølge som dannes av innkommende og reflektert bølge.

Oppgave 2

Rombølgefunksjonsdelen av et hydrogenatoms tilstand er gitt ved kvantetallene (n, l, m_l). Hvis den sfæriske harmoniske, $Y_l^{m_l}$, er kjent for en av m_l-verdiene ved gitt l, så kan uttrykkene for de andre mulige m_l-verdiene finnes ved bruk av stigeoperatorer. Det samme er tilfelle for spinndelen av bølgefunksjonen, der stigeoperatorer svitsjer mellom m_s-verdiene ved $s = 1/2$.

a) Hvis elektronet er i en tilstand med $l = 1$, hva er da den lavest mulige verdien til hovedkvantetallet n? Og hvilke mulige verdier kan elektronets totale dreieimpulskvantetall j da ha?

b) Bruk stigeoperatoren L_+ til å vise at Y_l^l, dvs. den sfæriske harmoniske $Y_l^{m_l}$ med $m_l = l$, er gitt ved (bortsett fra en normaliseringsfaktor som du ikke skal bestemme her):

$$Y_l^l(\theta, \phi) = (\sin\theta)^l e^{il\phi}$$

c) Finn et matriseuttrykk for S_+, stigeoperatoren for $s = 1/2$. Vis ved regning at $S_+|\downarrow> \propto |\uparrow>$, mens $S_+|\uparrow>= 0$.

d) For Coulombpotensialet i hydrogenatomet avhenger energien bare av hovedkvantetallet n. Er dette et generelt trekk ved sfærisk symmetriske potensialer?

Oppgave 3

Noen raskt besvarte (kort men konsist) spørsmål og regninger:

a) En partikkel er i tilstanden $|\phi>$, som har $|\psi_1>, |\psi_2>, \ldots, |\psi_n>$ som ortonormal basis. Q er en hermitesk operator. Basisvektorene oppfyller relasjonen $\sum_{j=1}^n |\psi_j><\psi_j| = 1$. Vis at

$$< Q^2 >= \sum_{j=1}^{n} | <\phi|Q|\psi_j> |^2$$

b) Regn ut kommutatoren $[P, X]$.

c) Hva er grunnen til at vi kan beskrive spinnet i en vilkårlig retning som en lineærkombinasjon av spinn opp og ned i z-retning?

d) Et elektron er opprinnelig i tilstanden $|\downarrow>$, dvs. med $m_s = -1/2$ i z-retning. Så måler vi spinnet langs x-aksen. Hva er sannsynligheten for å finne at elektronspinnet peker i $+x$-retning, dvs. at det er i tilstanden $|\rightarrow>$?

e) Regn ut normaliseringskonstanten c for vektoren $\boldsymbol{x} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3i \end{pmatrix}$.

– Fortsatt god jul –