EKSAMEN I FYS320 KVANTEMEKANIKK 17/12-2013

KORTFATTET LØSNINGSFORSLAG

1
a)

$$\psi_I = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}$$
$$\frac{d\psi_I}{dx} = ik_1Ae^{ik_1x} - ik_1Be^{-ik_1x}$$
$$\frac{d^2\psi_I}{dx^2} = -k_1^2Ae^{ik_1x} - k_1^2Be^{-ik_1x} = -k_1^2\psi_I$$

Innsatt:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right)(-k_1^2)\psi_I + 0\cdot\psi_I = E\psi_I \Rightarrow \frac{\hbar^2k_1^2}{2m} = E, \quad k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$ som skulle vises

$$\psi_{II} = C + Dx$$
$$\frac{d\psi_{II}}{dx} = D$$
$$\frac{d^2\psi_{II}}{dx^2} = 0$$

Innsatt:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot 0 + V_0\psi_{II} = E\psi_{II} \Rightarrow E = V_0$$ som også viser konsistens

b*)

ψ_{II} endelig for $x \to \infty \Rightarrow \underline{D = 0}$

Kontinuerlig $\frac{d\psi}{dx} \Rightarrow ik_1(A-B)\cdot 1 = D = 0 \Rightarrow \underline{A = B}$

Kontinuerlig $\psi \Rightarrow (A+B)\cdot 1 = C \Rightarrow \underline{A = \frac{1}{2}C,\ B = \frac{1}{2}C}$

c)

$$R = \frac{\frac{1}{2}C\cdot\frac{1}{2}C}{\frac{1}{2}C\cdot\frac{1}{2}C} = \underline{\underline{1}}$$

Sannsynlighet for tilbakekasting: $\underline{100\ \%}$

d)

$E \to V_0 \Rightarrow k_2 \to 0,\ A \to \frac{1}{2}C,\ B \to \frac{1}{2}C$

resultater for A og B er i full overensstemmelse med dette.

---

*) Eksplisitt:

$$\boxed{\begin{aligned}\psi_I &= C\cos(k_1x)\\ \psi_{II} &= C\end{aligned}}$$

2

a) Perturbasjon av grunntilstanden (n=1):

$$E^{(1)} = \langle \psi_1 | H_1 | \psi_1 \rangle$$
$$= \int_0^a \lambda\,\delta(x-\tfrac{a}{2}) \left(\sqrt{\tfrac{2}{a}}\sin\tfrac{\pi x}{a}\right)^2 dx$$
$$= \frac{2\lambda}{a}\sin^2\left(\frac{\pi}{a}\cdot\frac{a}{2}\right)$$
$$= \underline{\underline{\frac{2\lambda}{a}}}$$

b) $\dim[x]$ = lengde $\Rightarrow$ $\dim[\delta]$ = 1/lengde ifølge integraldef. av δ

$\dim[V] = \dim[\lambda]\,\frac{1}{\text{lengde}}$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{\dim[\lambda] = \text{energi} \times \text{lengde}}}$, benevning $\underline{\underline{\text{Jm}}}$

c) Tunnelleffekten (kort og godt)

d) I uttrykket for $E^{(2)}$:

$$\left.\begin{aligned} |\langle \psi_1 | H_1 | \psi_i \rangle|^2 &> 0 \quad (i \neq 1) \\ E_1 - E_i &< 0 \quad (i \neq 1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow E^{(2)} < 0$$

Med $E^{(1)}=0$ er da laveste ordens virkning av H_1 å <u>senke</u> grunntilstandsenergien.

e)
$$\frac{1}{2}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) = 7$$
Det eneste settet av heltall som gir kvadratsummen lik 14, er (1,2,3).
Av disse 3 ulike heltallene finnes det $3! = 6$ permutasjoner, dvs.

$$\underline{\text{degenerasjonsgraden} = 6}$$

3

a) $n=2 \Rightarrow l = 0$ eller 1

$$\left.\begin{aligned} |l-s| &= \tfrac{1}{2} \quad (\text{for begge}) \\ l+s &= \tfrac{1}{2} \text{ eller } \tfrac{3}{2} \end{aligned}\right\} \text{med } j = |l-s|, \ldots, l+s$$

$$m_j = -j, -j+1, \ldots, j-1, j \Rightarrow \underline{\underline{(m_j)_{min} = -\tfrac{3}{2}}}$$

b)

$$S_+ = S_x + i S_y = \tfrac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\hbar\, i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}}$$

$$\left.\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

Dvs. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ representerer allerede den høyest mulig verdien av spinn i z-retning, som altså ikke kan heves ytterligere. Mens $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ kan heves til $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) s, p og d står for $l=0$, $l=1$ og $l=2$.
"Kvalitativt" argument for fyllingsrekkefølgen:
$l=1$ fremviser langstrakt bane enn $l=0$, og $l=2$ en enda mer langstrakt;
elektroner med høye l "føler" da mindre tiltrekning fra kjernen enn dem med lave l, pga. skjerming.
Og for $n=3$ og $n=4$ blir skjermingseffekten så sterk at 4s-nivået får lavere energi enn 3d-nivået.

d) For hvert (n, l, m_l)-sett, to mulige elektronspinnretninger ifølge Pauliprinsippet.
$l=0 \Rightarrow 1$ mulig m_l-verdi
$l=1 \Rightarrow 3$ " " " " er
Med fylling nedenfra i energi:
$1s^2 2s^2 2p^6 3s \Rightarrow (2+2+6+1)$ elektroner $=$ 11 elektroner
(Na, atomnummer 11)
Med videre fylling av $(n=3)$-skallet, samt regelen om at $(n=4, l=0)$ havner under $(n=3, l=2)$:

$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s \Rightarrow (2+2+6+2+6+1)$ elektroner
$= 19$ elektroner
(K, atomnummer 19)

Kaliums elektronkonfigurasjon i grunntilstanden altså:

$$\underline{1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s}$$

4

a) Hermiteske operatorer har reelle egenverdier, og målte fysiske størrelser er reelle.
$(AB)^+ = B^+A^+$.

b) $[D, X]\psi = [\frac{\partial}{\partial x}, x]\psi$
$= \frac{\partial}{\partial x}(x\psi) - x\frac{\partial}{\partial x}\psi$
$= \psi$

$\Rightarrow$ $[D, X] = 1$

c) For rommet utspent av basisvektorene $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ kan alle vektorer skrives som lineærkombinasjoner av disse.

d) $P = |\langle\rightarrow|\downarrow\rangle|^2 = |\frac{1}{\sqrt{2}}(1\ 1)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}|^2 = |\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 1|^2 = \frac{1}{2}$

e) Spinn $\frac{1}{2}$ - partikler er fermioner, og to identiske fermioner må ha en antisymmetrisk bølgefunksjon.

Hvis romdelen av bølgefunksjonen er symmetrisk i bytte av de to partiklene (og den oppgitte ψ_{11} er symmetrisk),
så må spinndelen være antisymmetrisk, og det finnes ikke noen annen antisymmetrisk kombinasjon enn den oppgitte $|00\rangle$ — for total bølgefunksjon er produkt av rom- og spinnbølgefunksjon.

$\boxed{\text{KORT OG GODT!}}$

f) $\vec{x}^*\vec{x} = c^2(1\ 1\ -3i)\begin{pmatrix}1\\1\\3i\end{pmatrix} = c^2(1+1+3^2) = 1$

$\Rightarrow$ $c = \frac{1}{\sqrt{11}}$