Universitetet i Stavanger

DET TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET

EKSAMEN I: FYS320 Kvantemekanikk **DATO:** 17. desember 2014

TID FOR EKSAMEN: kl. 09.00-13.00 (4 timer)

TILLATTE HJELPEMIDDEL: Bestemt, enkel kalkulator (kode C)
Valgfri standard formelsamling
(f. eks. Rottmanns eller Knutsens)

OPPGAVESETTET BESTÅR AV 4 OPPGAVER, PÅ 4 SIDER INKL. DENNE FORSIDA

MERKNADER: Vis et utvalg regninger som leder fram til svarene!

OPPGITT:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 u(r)}{\partial r^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}u(r) + V(r)u(r) = Eu(r)\ ,\ \ u(r) = rR(r)\ ,\ \ \frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{1}{6}x^2 + \ldots$$

$$\psi_j(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{j\pi x}{a}\right) \qquad E_j = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}j^2 \qquad <\psi_a|O|\psi_b> = \int_{-\infty}^{\infty}\psi_a^*(x)O\psi_b(x)\,dx$$

$$E^{(1)} = <\psi_n|H_1|\psi_n> \qquad \delta(x) = 0 \quad (\text{for } x \neq 0) \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-a)f(x)\,dx = f(a)$$

$\psi_{nlm_l}(r,\theta,\phi) = R_{nl}(r)Y_l^{m_l}(\theta,\phi)\ ,\qquad n = 1,2,3,\ldots,\qquad l \leq n-1$ (H-atom)

$m_j = -j, -j+1, \ldots, 0, \ldots j-1, j$ (z-komponenter generelt, også for $j \to l$ og $j \to s$)

$j = |l-s|, |l-s|+1, \ldots, l+s-1, l+s$ (totaldreieimpuls)

$$S_\pm = S_x \pm iS_y\ , \qquad S_i = \frac{1}{2}\hbar\sigma_i \qquad (i = x,y,z)$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad |\uparrow> \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\downarrow> \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

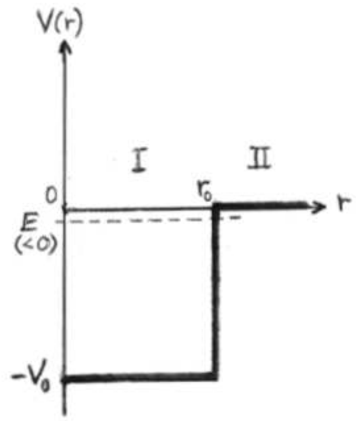
$$|\leftarrow> \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = x_1^* y_1 + x_2^* y_2 + \ldots + x_n^* y_n$$

$P = |<\mathrm{f}|\mathrm{i}>|^2$ (sannsynlighet, i for begynnelsestilstand, f for sluttilstand)

Oppgave 1

For deuteronet (kjernen i et deuteriumatom) kan man tilnærmet anta at protonet og nøytronet, som har nesten like masser, beveger seg i et sentralsymmetrisk potensial omkring massefellespunktet i kjernen. Potensialet skyldes de gjensidige kjernekreftene. I denne oppgaven skal vi betrakte protonet, med masse m_p, og anta at potensialet for det kan approksimeres som en "sfærisk firkantbrønn" (der altså $r \geq 0$) ut til kjerneradien r_0:



$$V(r) = \begin{cases} -V_0 \ (V_0 > 0) & 0 \leq r \leq r_0 \quad \text{(I)} \\ 0 & r > r_0 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Vi ønsker å beregne V_0. Vi skal anta at deuteronet er "nesten ubundet" (essensielt $|E| \ll U_0$), at dreieimpulskvantetallet $l = 0$, og at kjernen er i laveste radielle energitilstand. Du får oppgitt at den skalerte bølgefunksjonen $u(r) = rR(r)$ i områdene I og II som oppfyller radialbølgelikningen for $l = 0$, er gitt ved

$$u_{\mathrm{I}}(r) = A_\mathrm{I}\cos(k_\mathrm{I} r) + B_\mathrm{I}\sin(k_\mathrm{I} r)\ , \qquad k_\mathrm{I} = \frac{\sqrt{2m_\mathrm{p}(V_0 - |E|)|}}{\hbar}$$

$$u_{\mathrm{II}}(r) = A_\mathrm{II} e^{k_\mathrm{II} r} + B_\mathrm{II} e^{-k_\mathrm{II} r}\ , \qquad k_\mathrm{II} = \frac{\sqrt{2m_\mathrm{p}|E|}}{\hbar}$$

a) Vis ved innsetting at u_I er en gyldig løsning av radialbølgelikningen i område I.

b) Bruk kravet at radialbølgefunksjonen $R(r) = u(r)/r$ skal være endelig både for $r \to 0$ og $r \to \infty$, til å eliminere en av integrasjonskonstantene i hvert område.

c) Bruk kontinuitetskravene til u samt til du/dr ved $r = r_0$ til å finne, ved divisjon, at E og V_0 må oppfylle

$$\tan\left(\frac{\sqrt{2m_\mathrm{p}(V_0 - |E|)}}{\hbar} r_0\right) + \sqrt{\frac{V_0 - |E|}{|E|}} = 0$$

Vis regningen.

d) Vis at i grensen $|E| \ll V_0$ har uttrykket en asymptotisk form som medfører

$$V_0 \approx \frac{\pi^2}{8}\frac{\hbar^2}{m_\mathrm{p} r_0^2} = \frac{1}{32}\frac{h^2}{m_\mathrm{p} r_0^2}$$

e) Numerisk gir det $V_0 \approx 51$ MeV *(det skal du ikke regne ut)*. Eksperimentelt funnet bindingsenergi pr. nukleon i deuteronet er av størrelsesorden 2.2 MeV. Ut fra dette, kommenter kort konsistensen i regnemåten vi brukte for å finne V_0.

Oppgave 2

Vi betrakter to identiske spinn-1/2-partikler som befinner seg i en 1-dimensjonal firkantbrønn med lengde a og ∞ høye potensialvegger ved $x = 0$ og $x = a$, og $V(x) = 0$ for $0 \leq x \leq a$. Vi skal anta at de vekselvirker svakt via potensialet $V_1(x) = K\delta(x_1 - x_2)$. Her er x_1 og x_2 partikkelposisjonene, K er en konstant og δ er Diracs deltafunksjon – altså en svak vekselvirkning med svært kort rekkevidde.[1]

a) Begrunn kort (med ord) hvorfor rombølgefunksjonen $\psi_{\mathrm{mn}}(x_1, x_2)$ i tilstanden med lavest mulig energi må være symmetrisk, hvis spinnene er koplet i singlettilstanden

$$|0\,0> = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\downarrow> - \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\uparrow>$$

b) Anta så at spinnene i stedet er koplet i en triplettilstand, slik at også rombølgefunksjonen $\psi_{\mathrm{mn}}(x_1, x_2)$ blir forskjellig. Skriv ned det normaliserte uttrykket for rombølgefunksjonen med lavest energi E_{mn}, og angitte (m, n)-verdier, samt størrelsen av denne energien.

c) Med spinnene i triplettilstand, bruk tidsuavhengig perturbasjonsteori til å beregne verdien av $E^{(1)}$, dvs. laveste ordens energiforskyvning av tilstanden med lavest tillatt uperturbert energi.

d) Kan du gi en (kortfattet) fysisk begrunnelse for resultatet fra forrige punkt?

e) Hva er dimensjonaliteten/SI-benevningen til konstanten K i V_1?

Oppgave 3

Noen raskt besvarte spørsmål og regninger:

a) Hvis elektronet i et hydrogenatom er i en tilstand med $n = 4$, hva er da den mest mulig negative verdien av det totale magnetiske kvantetallet m_j?

b) Finn et matriseuttrykk for S_-, senkeoperatoren for $s = 1/2$. Regn ut $S_-|\downarrow>$ og $S_-|\uparrow>$. Hva er det fysiske innholdet av de to resultatene?

c) I fler-elektron-atomer blir subskallene fylt i rekkefølgen $1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 4s, 3d, \ldots$ Hva står s, p og d for? Nevn kort den fysiske grunnen til denne rekkefølgen av fylling av s-, p- og d-skallene for hver hovedkvantetallverdi, samt grunnen til at energitilstanden med $n = 4$, $l = 0$ blir dratt under den med $n = 3$, $l = 2$.

d) Et kaliumatom (atomnummer 19) har elektronkonfigurasjonen $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 4s$ i grunntilstanden. Hva er tilsvarende elektronkonfigurasjon for et natriumatom (atomnummer 11)?

e) Nevn kort grunnen til at vi for $s = 1/2$ kan beskrive spinnet i en vilkårlig retning som en lineærkombinasjon av spinn opp og ned i z-retning.

[1] I spørsmål a) og b), se bort fra innvirkning av perturbasjonspotensialet $V_1(x)$.

Oppgave 4

Noen flere raskt besvarte (kort men konsist) hummer-og-kanari-spørsmål og regninger:

a) En partikkel er i tilstanden $|\phi\!>$, som har $|\psi_1\!>, |\psi_2\!>, \ldots, |\psi_n\!>$ som ortonormal basis, med $H|\psi_j\!>= E_j|\psi_j\!>$ for alle j. Basisvektorene oppfyller relasjonen $\sum_{j=1}^{n} |\psi_j\!><\!\psi_j| = 1$. La Z stå for posisjonsoperatoren i z-retning. Betrakt en operator Q som oppfyller

$$< Q >= \sum_{m=1}^{n} E_m | <\phi|Z|\psi_m> |^2$$

Utled et uttrykk for denne operatoren Q som funksjon av H og Z, men som ikke inneholder E_m.

b) Hvorfor er hermiteske operatorer ($A^\dagger = A$) viktige i kvantemekanikk? Og hva er generelt $(AB)^\dagger$ uttrykt ved $A^\dagger$ og $B^\dagger$ (nok å skrive det, behøves ikke utledet)?

c) Et elektron er opprinnelig i tilstanden $|\uparrow\!>$, dvs. med $m_s = +1/2$ i z-retning. Så måler vi spinnet langs x-aksen. Hva er sannsynligheten for å finne at elektronspinnet peker i $-x$-retning, dvs. at det er i tilstanden $|\leftarrow\!>$?

d) Hva forbinder du med begrepet "21-cm-linjen"?

e) Den generelle fire-komponent-spinoren ψ som er løsning av Diraclikningen, er kjent fra en regneoppgave *(det skal du ikke utlede)* på en form der to-komponent-objektet ϕ beskriver en spinn-1/2-partikkel:

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ [c(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})/(E+mc^2)]\,\phi \end{pmatrix} e^{i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}-Et/\hbar)}\,, \qquad \phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

Betrakt tilfellet der et slikt fermion er i ro ($\boldsymbol{p} = 0$), og skriv ned det normaliserte fire-komponent-uttrykket for spinoren som tilsvarer positiv energi og spinn i $(-x)$-retning.

– Fortsatt god jul –