EKSAMEN I FYS320 KVANTEMEKANIKK 17/12-2014

KORTFATTET LØSNINGSFORSLAG

1

a)

$$u_I = A_I\cos(k_I r) + B_I\sin(k_I r), \quad k_I = \frac{\sqrt{2m_p(V_0-|E|)}}{\hbar}$$

$$\frac{du_I}{dr} = -k_I A_I \sin(k_I r) + k_I B_I \cos(k_I r)$$

$$\frac{d^2u_I}{dr^2} = -k_I^2 A_I\cos(k_I r) - k_I^2 B_I \sin(k_I r)$$

$$= -k_I^2 u_I$$

Innsatt:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_p}(-k_I^2 u_I) + \underbrace{\boxed{\cancel{\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}}}}_{\to 0} u_I - V_0 u_I = E u_I$$

$$\frac{\hbar^2}{2m_p}k_I^2 = V_0 + E = V_0 - |E| \quad \text{(fordi } E<0\text{!)}$$

$$k_I^2 = \frac{2m(V_0-|E|)}{\hbar^2} \quad \text{(som skulle vises)}$$

b)

For $r\to 0$: $\quad \dfrac{\cos(k_I r)}{r} \to \infty, \quad \dfrac{\sin(k_I r)}{r} \to k_I$

For $r\to\infty$: $\quad \dfrac{1}{r}e^{k_{II}r} \to \infty, \quad \dfrac{1}{r}e^{-k_{II}r} \to 0$

dvs.

$$A_I = 0, \quad A_{II} = 0$$

c) Med kontinuitetskrav ved $r = r_0$:

$$u_I(r=r_0) = u_{II}(r=r_0)$$

$$B_I\sin(k_I r_0) = B_{II}e^{-k_{II}r_0} \qquad (*)$$

$$\frac{du_I}{dr}(r=r_0) = \frac{du_{II}}{dr}(r=r_0)$$

$$k_I B_I\cos(k_I r_0) = -k_{II}B_{II}e^{-k_{II}r_0} \qquad (**)$$

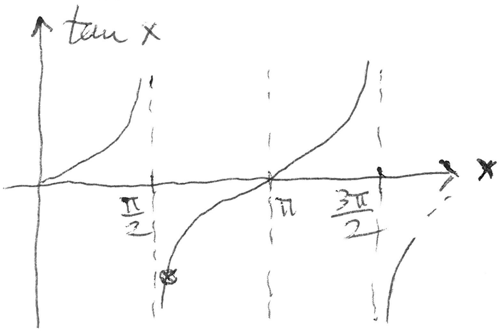
Divider $(*)$ på $(**)$:

$$\frac{1}{k_I}\tan(k_I r_0) = -\frac{1}{k_{II}}$$

Og dermed:

$$\tan\left(\frac{\sqrt{2m_p(V_0-|E|)}}{\hbar}r_0\right) = -\sqrt{\frac{V_0-|E|}{|E|}} \quad \text{som skulle vises!}$$

d) I grensen $V_0 \gg |E|$ ser man at argumentet til tan må være litt større enn $\frac{\pi}{2}$ (det stemmer med fortegnet på høyre side):



Men når $\frac{V_0}{|E|} \to \infty$:

$$\sqrt{2m_p V_0}\,\frac{r_0}{\hbar} \approx \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad V_0 \approx \frac{\pi^2}{8}\frac{\hbar^2}{m_p r_0^2} = \frac{1}{32}\,\frac{h^2}{32 m_p r_0^2}$$

som også skulle vises!

e) Med $V_0 \approx 51$ MeV og $|E| = 2.2$ MeV:

$$x = \sqrt{\frac{V_0 - |E|}{|E|}} \approx 4.71$$

Dvs. argumentet til tan blir noe større enn $\frac{\pi}{2}$ ved innsetting på høyre side, men det er likevel "god" grunn til å tenke at $V_0 \approx 51$ MeV er riktig størrelsesorden.

Hvor godt er resultatet EGENTLIG? Se følgende regning (som det SELVSAGT IKKE kreves gjort til eksamen) – denne er mer å stole på:

Omskriv til

$$\tan(x \cdot \Delta) = -x$$

der

$$x = \sqrt{\frac{V_0 - |E|}{|E|}}, \qquad \Delta = \sqrt{\frac{2m_p |E| r_0^2}{\hbar^2}}$$

Tallinnsetting:

$$\Delta^2 = \frac{2\times 1.67\times 10^{-27} \times 2.2\times 10^{-30}}{(1.055)^2 \times 10^{-68}}\left(\frac{MeV}{J}\right) = 6.602\times 10^{11}\left(\frac{MeV}{J}\right)$$

$$= 6.602 \times 1.602 \times 10^{11-13} = 0.1058 = (0.325)^2$$

Dvs. løs

$$\tan(0.325x) = -x$$

der man ~~kan~~ ha

$$0.325x > \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{x > 4.83}$$

Ved numerisk løsning (evt. "prøving og feiling")

$$x \approx 5.40$$

dvs.

$$V_0 \approx |E|(1+x^2) = 2.2(1+(5.4)^2)\ \text{MeV} \approx \underline{66\ \text{MeV}}$$

Verdien 51 MeV funnet "i grensen" er 23% feil, men rett størrelses-orden!

2

a)

En felles bølgefunksjon for 2 fermioner må være totalt antisymmetrisk. Hvis spinnene er koplet i en singlettilstand (antisymmetrisk) så må rombølgefunksjonen $\psi_{mn}(x_1, x_2)$ være symmetrisk.
Laveste energitilstand blir

$$\psi_{11}(x_1, x_2)$$

dvs. $m = n = 1$.

b)

De tre mulige triplettilstandene er symmetriske i spinndelen, så romdelen av bølgefunksjonen må være antisymmetrisk i bytte av partiklene.
Generelt, derfor:

$$\psi_{mn}(x_1 x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2}{a}\left(\sin\left(\frac{m\pi x_1}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi x_2}{a}\right) - \sin\left(\frac{n\pi x_1}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi x_2}{a}\right)\right)$$

Her må $m \neq n$, ellers blir bølgefunksjonen lik 0 overalt.
Tilstanden med lavest energi blir

$$\underline{\underline{\psi_{12}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2}{a}\left(\sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right)\sin\left(\frac{2\pi x_2}{a}\right) - \sin\left(\frac{2\pi x_1}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right)\right)}}$$

og energien

$$E_{12} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}(1^2 + 2^2) = \underline{\underline{\frac{5\hbar^2\pi^2}{2ma^2}}}$$

c)

Ta matriseelementet av V_1, og integrer ut en av de variable ved hjelp av δ-funksjonen:

$$E^{(1)} = \langle \psi_{12} | V_1 | \psi_{12} \rangle = K \int_{x_1=0}^{a} dx_1 \underbrace{\int_{x_2=0}^{a} dx_2\, \psi_{12}^*(x_1, x_2)\, \delta(x_1 - x_2)\, \psi_{12}(x_1, x_2)}_{|\psi_{12}(x_1, x_1)|^2}$$

$$= K \int_{x=0}^{a} dx \underbrace{|\psi_{12}(x, x)|^2}_{\to 0}$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

(!)

d)

Pga. δ-funksjonsegenskapen blir det bare vekselvirkning der hvor posisjonene er like, men slike konfigurasjoner har 0 sannsynlighet. (Et korollar til Paulis eksklusjonsprinsipp.)

o/o

e) V_1 skal ha dimensjon energi. Siden

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1$$

må δ ha dimensjon 1/lengde. Da må K ha dimensjon som <u>energi × lengde</u>

og SI-benevning <u>J × m</u>.

3

a)

$$(m_j)_{min} = -(j)_{maks} = -(l+s)_{maks} = -(l_{maks} + s)$$
$$= -((n-1) + s)$$
$$= -\left(3 + \tfrac{1}{2}\right)$$
$$= \underline{\underline{-\tfrac{7}{2}}}$$

(Raskt & greit)

b)

$$S_- = \tfrac{1}{2}\hbar(\sigma_x - i\sigma_y) = \tfrac{1}{2}\hbar\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} - i\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\right) = \hbar\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$

$$S_-|\downarrow\rangle = \hbar\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \hbar\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \underline{\underline{0}}$$

$$S_-|\uparrow\rangle = \hbar\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \hbar\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \underline{\underline{\hbar|\downarrow\rangle}}$$

S_- kan senke $|\uparrow\rangle$ til $|\downarrow\rangle$, som er lavest mulige "ned"-tilstand. S_- anvendt på den må gi resultat 0.

c) s, p og d står for $l=0$, $l=1$ og $l=2$.
Lave l-tilstander "føler" en sterkere Coulomb-tiltrekning enn de høyere som er mer langstrakte. De førstnevnte får da lavere energi og fylles først. (for hver hovedkvantetallverdi).
For $n=4$ blir skjermingseffekten pga. indre elektroner så sterk at $(n=4, l=0)$-tilstanden blir trukket energimessig <u>under</u> $(n=3, l=2)$-tilstanden.

d) Fyllinga av subskall for atomnummer 19 er slik at elektronene kommer "etter tur" i laveste tilgjengelige tilstand.
For natrium (atomnummer 11) blir konfigurasjonen
$\underline{\underline{1s^2 2s^2 2p^6 3s}}$, etter samme prinsipp.

o/o

e) For rommet utspent av basisvektorene $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ kan alle vektorer skrives som lineær kombinasjoner av disse, som i utgangspunktet skulle representere spinn opp og ned i z-retning.

4

a) Ut fra det som er oppgitt:

$$\begin{aligned}
\langle a \rangle &= \sum_m E_m |\langle \phi | Z | \psi_m \rangle|^2 \quad (Z - \text{hermitesk pos. op.}) \\
&= \sum_m \langle \phi | Z E_m | \psi_m \rangle \langle \psi_m | Z | \phi \rangle \quad (E_m \text{ reell skalar}) \\
&= \sum_m \langle \phi | Z H \underbrace{| \psi_m \rangle \langle \psi_m |}_{\to (1 \text{ pga. summen})} Z | \phi \rangle \\
&= \langle \phi | Z H Z | \phi \rangle \\
&= \langle Z H Z \rangle
\end{aligned}$$

Og følgelig:

$$a = ZHZ$$

b) Hermiteske operatorer har reelle egenverdier, som kan representere fysiske observable.

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

c) Etterspurt sannsynlighet:

$$\begin{aligned}
P &= |\langle \leftarrow | \uparrow \rangle|^2 \\
&= \left| \tfrac{1}{\sqrt{2}} (1 \ -1) \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \right|^2 \\
&= \left| \tfrac{1}{\sqrt{2}} (1+0) \right|^2 \\
&= \frac{1}{2} \quad (50\% \text{ sannsynlighet})
\end{aligned}$$

d) I hydrogenatomet har man også spinn-spinn-v.v. mellom elektron og proton, som er undertrykt i størrelse med en faktor m_e/m_p.
Spinnene kan være koplet som triplett ($S=1$) eller singlett ($S=0$), hvor energidifferansen er $\Delta E = 5.9 \times 10^{-6}$ eV.
Dette gir opphav til hyperfinsplitting.
Når nøytral hydrogengass "faller" fra triplett- til singlettilstand, sendes det ut fotoner med $\nu = 1420$ MHz eller $\lambda \approx 21$ cm.
Slik mikrobølgestråling blir observert fra nøytrale hydrogengasskyer i universet – derav navnet "21-cm-linjen".

(Noen færre ord i eksamensbesvarelsen her er OK ☺)

e) Lett. $\vec{p}=0$ siden fermionet (f.eks. et elektron) skal være i ro:

$$\psi^{(\vec{p}=0)} = \begin{pmatrix} \phi \\ 0 \end{pmatrix} e^{-iEt/\hbar}$$

Som vist i forelesningene, vil $\phi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ tilsvare spinn hhv. opp og ned i z-retning.
Og med sammenhengen mellom $|\leftrightarrow\rangle$ og disse to basisvektorene (side 1 i oppgaveteksten), må den etterspurte normaliserte 4-komponent-spinoren være

$$\psi^{(\vec{p}=0 \,\&\, |\leftrightarrow\rangle)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-Et/\hbar}$$

Enkelt & greit !