Løsninger til kapittel 2

2.5

$$i^i = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^i = e^{i\frac{\pi}{2}\cdot i} = \underline{e^{-\frac{\pi}{2}}}$$

2.6

Hvorfor dette er galt?

$$\text{ikke OK} \quad \sqrt{\frac{1}{-1}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} \quad \text{OK}$$

$$\sqrt{-1} = \frac{1}{i}$$

$$i = \frac{1}{i}$$

$$i^2 = 1$$

$$\underline{-1 = 1} \qquad (!?)$$

HS; la m og n stå for vilkårlige heltall:

$$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{e^{i2\pi m}}{e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi n)}} = e^{i(-\frac{\pi}{2}+2\pi(m-n))}$$

$$= e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi(m-n-\frac{1}{2}))}$$

$$= e^{-i\pi}\, e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi(m-n))}$$

$$= -i$$ ← (som "foreslått" i boka)

VS; bruk konsistent polarnotasjon og husk at ekstra faktorer $e^{2\pi k i}$ under rottegnet må kansellere mellom teller og nevner:

$$\sqrt{\frac{1}{-1}} = \sqrt{\frac{1}{e^{i\pi}}}$$

$$= e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$= -i$$ ← (korrigert i forhold til bokas "forslag")

Altså: Første likhetsuttrykk er korrekt.
Men i lærebokuttrykket man skulle vise var feil, ble ikke VS behandlet videre på en konsistent måte i polarnotasjon. Og man endte der opp med et vanvittig resultat.

2.8

Identitetsoperatoren $I[f(x)] = f(x)$

Den er lineær:

$$I[f(x)+g(x)] = I[f(x)] + I[g(x)]$$
$$I[c\,f(x)] = c\,I[f(x)]$$

Og den har pr. definisjon egenverdi $c = 1$!

2.12

Operatoren $L[f(x)] = \int_0^x f(s)\,ds$

Den er åpenbart lineær:

$$L[f+g] = \int_0^x f(s)\,ds + \int_0^x g(s)\,ds = L[f] + L[g]$$

Men foreleseren klarer ikke å finne noen egenfunksjoner.

Derimot; med

$$L[f(x)] = \int_{-\infty}^x f(s)\,ds$$

finner man at

$$g(x) = A e^{cx}$$

er en egenfunksjon* med egenverdi $\frac{1}{c}$!

Bare prøv sjøl!

---

*) Forskjellen ligger i at såfremt integralet skal eksistere, må nedre grenseverdi her være lik 0.