Integralet i oppgave 3.1

Ved normaliseringen og i middelverdiberegningene opptrer

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^n e^{-ax^2} = 2\int_0^{\infty} dx\, x^n e^{-ax^2} = 2\, I_n(a) \qquad (\text{like } n)$$

$I_n(a)$ er et standardintegral i matematisk fysikk, som man finner i mange sammenhenger:

$$I_n(a) = \int_0^{\infty} dx\, x^{n-2}\left(-\frac{d}{da}\right) e^{-ax^2} = -\frac{d}{da} I_{n-2}(a)$$

Kjenner man I_0 og I_1, så kan høyere ordener finnes ved suksessive derivasjoner.

I_0:

$$I_0(a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{\infty} du\, e^{-u^2} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} du\, e^{-u^2} \qquad (ax^2 = u^2)$$

Gå over til polarkoordinater:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} du\, e^{-u^2}\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-y^2}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy \qquad (dx\,dy = r\,dr\,d\varphi)$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} dr\, r\, e^{-r^2} \qquad \left(\begin{array}{l} r^2 = s \\ r\,dr = \frac{1}{2} ds \end{array}\right)$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} \frac{1}{2}\, ds\, e^{-s}$$

$$= \pi$$

og altså

$$\boxed{I_0(a) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}}$$

I_1:

$$\int_0^{\infty} dx\, x\, e^{-ax^2} = \frac{1}{2a}\int_0^{\infty} du\, e^{-u} \qquad \left(\begin{array}{l} ax^2 = u \\ x\,dx = \frac{1}{2a} du \end{array}\right)$$

og dermed

$$\boxed{I_1(a) = \frac{1}{2a}}$$

Ved å derivere kan man lage seg starten på en ∞ lang tabell:

$I_0(a) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$	$I_1 = \frac{1}{2a}$
$I_2(a) = \frac{1}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$	$I_3 = \frac{1}{2a^2}$
$I_4(a) = \frac{3}{8a^2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$	$I_5 = \frac{1}{a^3}$
$\vdots$	$\vdots$