Integralet i oppgave 3.1

Ved normaliseringen og i middelverdiberegningene opptrer

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^n e^{-ax^2} = 2\int_0^{\infty} dx\, x^n e^{-ax^2} = 2\, I_n(a) \qquad (\text{like } n)$$

$I_n(a)$ er et standardintegral i matematisk fysikk, som man finner i mange sammenhenger:

$$I_n(a) = \int_0^{\infty} dx\, x^{n-2}\left(-\frac{d}{da}\right) e^{-ax^2} = -\frac{d}{da} I_{n-2}(a)$$

Kjenner man I_0 og I_1, så kan høyere ordener finnes ved suksessive derivasjoner.

I_0:

$$I_0(a) = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{\infty} du\, e^{-u^2} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty} du\, e^{-u^2} \qquad (ax^2 = u^2)$$

Gå over til polarkoordinater:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} du\, e^{-u^2}\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2}\int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-y^2}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy \qquad (dx\,dy = r\,dr\,d\varphi)$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} dr\, r\, e^{-r^2} \qquad \left(r^2 = s,\ r\,dr = \tfrac{1}{2}ds\right)$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} \frac{1}{2}\, ds\, e^{-s}$$

$$= \pi$$

og altså

$$\boxed{I_0(a) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}}$$

I_1:

$$\int_0^{\infty} dx\, x\, e^{-ax^2} = \frac{1}{2a}\int_0^{\infty} du\, e^{-u} \qquad \left(ax^2 = u,\ x\,dx = \frac{1}{2a}du\right)$$

og dermed

$$\boxed{I_1(a) = \frac{1}{2a}}$$

Ved å derivere kan man lage seg starten på en ∞ lang tabell:

$I_0(a) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$	$I_1 = \frac{1}{2a}$
$I_2(a) = \frac{1}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$	$I_3 = \frac{1}{2a^2}$
$I_4(a) = \frac{3}{8a^2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$	$I_5 = \frac{1}{a^3}$
$\vdots$	$\vdots$

Løsninger kapittel 3

3.1

Gitt $\Psi(x,t) = Ax\, e^{-(\sqrt{km}/2\hbar)x^2} e^{-i\sqrt{k/m}\,\frac{3}{2}t}$, $-\infty < x < +\infty$

a) Potensialet tidsuavhengig? Sett inn i SL:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = A e^{\cdots} e^{\cdots} - 2Ax^2 \frac{\sqrt{km}}{2\hbar} e^{\cdots} e^{\cdots}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -A\,2x \frac{\sqrt{km}}{2\hbar} e^{\cdots} e^{\cdots} - 4Ax \frac{\sqrt{km}}{2\hbar} e^{\cdots} e^{\cdots} + 4Ax^3 \left(\frac{\sqrt{km}}{2\hbar}\right)^2 e^{\cdots} e^{\cdots}$$

$$V\Psi = V(x,t) Ax\, e^{\cdots} e^{\cdots}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{3}{2} i \sqrt{\frac{k}{m}}\, Ax\, e^{\cdots} e^{\cdots}$$

Forenkling før innsetting:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(-6\frac{\sqrt{km}}{2\hbar} + 4x^2\left(\frac{\sqrt{km}}{2\hbar}\right)^2\right)\Psi$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{3}{2}\hbar\sqrt{\frac{k}{m}}\,\Psi$$

Høyresideleddet vil presis kansellere ~~første~~ ledd i ∂^2-uttrykket, og resten må være V, som blir eksplisitt tidsuavhengig:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} 4x^2 \frac{km}{4\hbar^2} + V(x) = 0$$

$$\underline{\underline{V(x) = \frac{1}{2}kx^2}}$$

Dette er et harmonisk oscillatorpotensial. Den oppgitte bølgefunksjonen er første eksiterte tilstand, se læreboka side 87, likning (4.47).

b) Normalisering:

$$\Psi^*\Psi = |A|^2 x^2 e^{-\frac{\sqrt{km}}{\hbar}x^2} \quad \text{(tidsavhengigheten faller ut)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*\Psi\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |A|^2 x^2 e^{-\frac{\sqrt{km}}{\hbar}x^2} dx$$

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\sqrt{km}}{\hbar}x^2 &= s^2 \\ x^2 dx &= \left(\frac{\hbar}{\sqrt{km}}\right)^{3/2} s^2 ds\end{aligned}}$$

$$= |A|^2 \left(\frac{\hbar}{\sqrt{km}}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} ds\, s^2 e^{-s^2} = 1$$

Med integraldefinisjonen på forrige side er det resterende integralet lik $2\,I_2(1) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

og altså

$$\boxed{A = \frac{2^{1/2}}{\pi^{1/4}}\left(\frac{\sqrt{km}}{\hbar}\right)^{3/4}}$$

c) Vi ser straks

$$\langle x \rangle = 0$$
$$\langle p \rangle = 0$$

siden i integralene vil integrandene bli odde i potensene av x, slik at bidragene fra negative og positive x kansellerer hverandre.

I $\langle x^2 \rangle$ ekstra x^2-faktor i integranden:

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* x^2 \Psi \, dx$$

$$= |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\frac{\sqrt{km}}{\hbar} x^2} dx$$

$$\boxed{\frac{\sqrt{km}}{\hbar} x^2 = s^2 \text{ her og}}$$

$$= \underbrace{|A|^2 \left(\frac{\hbar}{\sqrt{km}}\right)^{3/2}}_{\frac{2}{\sqrt{\pi}}} \frac{\hbar}{\sqrt{km}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} ds\, s^4 e^{-s^2}}_{2 I_4(1) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}}$$

dvs.

$$\boxed{\langle x^2 \rangle = \frac{3}{2} \frac{\hbar}{\sqrt{km}}}$$

I $\langle p^2 \rangle$ vil den innsatte $\left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)$-faktoren bringe ned en faktor

$$-\hbar^2 \left(-6 \frac{\sqrt{km}}{2\hbar} + 4x^2 \left(\frac{\sqrt{km}}{2\hbar}\right)^2\right)$$

Heldigvis har vi allerede regna ut begge de to integralene som oppstår:

$$\langle p^2 \rangle = 6\hbar^2 \frac{\sqrt{km}}{2\hbar} \underbrace{|A|^2 \left(\frac{\hbar}{\sqrt{km}}\right)^{3/2}}_{\frac{2}{\sqrt{\pi}}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} ds\, s^2 e^{-s^2}}_{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}$$

$$- 4\hbar^2 \left(\frac{\sqrt{km}}{2\hbar}\right)^2 \underbrace{|A|^2 \left(\frac{\hbar}{\sqrt{km}}\right)^{3/2}}_{\frac{2}{\sqrt{\pi}}} \frac{\hbar}{\sqrt{km}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} ds\, s^4 e^{-s^2}}_{\frac{3}{4}\sqrt{\pi}}$$

$$= \hbar\sqrt{km} \left\{3 - \frac{3}{2}\right\}$$

$$\boxed{\langle p^2 \rangle = \frac{3}{2} \hbar \sqrt{km}}$$

Og:

$$\left.\begin{aligned} \langle V \rangle &= \frac{1}{2} k \langle x^2 \rangle = \frac{3}{4} \hbar \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \frac{1}{2m} \langle p^2 \rangle &= \frac{1}{2m} \frac{3}{2} \hbar \sqrt{km} = \frac{3}{4} \hbar \sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}\right\} \text{ Like store!}$$

Det gjelder generelt for harmonisk oscillator!

3.3

Bølge funksjon $\Psi(x,t) = \sin(kx)\left[i\cos\frac{\omega t}{2} + \sin\frac{\omega t}{2}\right]$.

a) Egenfunksjon for impuls?

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\Psi = -i\hbar k\cos(kx)\left[i\cos\frac{\omega t}{2} + \sin\frac{\omega t}{2}\right] \neq -ip\Psi$$

Nei

b) Egenfunksjon for energi?

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = i\hbar\sin(kx)\frac{\omega}{2}\left[-i\sin\frac{\omega t}{2} + \cos\frac{\omega t}{2}\right]$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2}\sin(kx)\left[i\cos\frac{\omega t}{2} + \sin\frac{\omega t}{2}\right]$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2}\Psi$$ Ja, $E = \frac{1}{2}\hbar\omega$

3.7

$\Psi(\vec{r},t)$ normalisert. $\tilde{\Psi} = e^{i\theta}\Psi$ annen funksjon.

Normalisert?

$$\int\tilde{\Psi}^*\tilde{\Psi}\,d^3\vec{r} = \int e^{-i\theta}\Psi^* e^{i\theta}\Psi\,d^3\vec{r} = \int\Psi^*\Psi\,d^3r = 1$$ Ja

3.8

Antа ψ_1 og ψ_2 to forskjellige løsninger av Tidsuavh. SL, med samme energi E.

a) $(\psi_1+\psi_2)$ også løsning med energi E?

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\psi_1+\psi_2) = i\hbar\frac{\partial\psi_1}{\partial t} + i\hbar\frac{\partial\psi_2}{\partial t}$$

$$= E\psi_1 + E\psi_2 = E(\psi_1+\psi_2)$$ Ja

b) $c\psi_1$ også løsning med energi E?

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(c\psi_1) = c\,i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_1 = cE\psi_1 = E\cdot(c\psi_1)$$ Ja