Kapittel 15:

RELATIVISTISK KVANTEMEKANIKK

Fra Schrödingerlikningens ikke-relativistiske Hamilton-operator, skal vi nå gå videre til relativistiske uttrykk.

15.1 Klein-Gordon-likningen

Utledning

Einsteins relasjon mellom impuls og energi:

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \qquad (m - \text{hvilemasse}) \qquad (15.2)$$

Ved rekkeutvikling for $v \ll c$:

$$E = mc^2\sqrt{1+\frac{p^2}{m^2c^2}}$$
$$= mc^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{p^2}{m^2c^2}+\ldots\right)$$
$$= \frac{p^2}{2m} + \underbrace{mc^2}_{\text{hvileenergi}} + \ldots$$

En relativistisk behandling må inkludere hvileenergien, selv i tilfellet $V=0$.

Start med bølgefunksjon som er egenfunksjon for E og p, men bruk egenverdilikningene med kvadratene av operatorene (dvs. bruk dem to ganger)

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\phi = E^2\phi$$
$$(-i\hbar\nabla)^2\phi = p^2\phi$$

Sett inn i (15.2)

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\phi = (-i\hbar\nabla)^2c^2\phi + m^2c^4\phi \qquad (15.4)$$

dvs.

$$\boxed{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \nabla^2\phi + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi = 0} \quad \text{KLEIN-GORDON-LIKNINGEN} \qquad (15.5)$$

Klein-Gordon-likningen gjelder for spinn 0.

Sannsynlighetstettheter og -strømmer

Det er ikke tilfelle at sannsynlighetstettheten her er $|\phi|^2$, selv om den er $|\psi|^2$ for Schrödingerlikningen!

Ta analogi med klassisk fluidmekanikk, hvor kontinuitetslikningen er

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v}) = 0 \qquad (15.6)$$

eller integralt

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} + \int_A (\rho\vec{v})\cdot d\vec{A} = 0 \qquad (15.7)$$

Annet ledd på integralformen angir hvordan massen passerer gjennom grenseflater pr. tidsenhet.

Innfør en tilsvarende definisjon for kvantemekanisk sannsynlighetstetthet, med $\vec{J}$ en sannsynlighetsstrøm:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{J} = 0} \qquad (15.8)$$

Eksempel 15.1

Ikke-relativistisk sannsynlighetsstrøm.

Sett $\rho = \psi^*\psi$ til kontinuitetslikningen:

$$\psi^*\frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi\frac{\partial \psi^*}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{J} = 0 \qquad (15.9)$$

Bruk SL uten potensialledd, mult. med $(-i\psi^*/\hbar)$, ta også komplekskonjugert, og få to ledd som kan settes inn i (15.9):

$$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi$$

$$\psi^*\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m}\psi^*\nabla^2\psi$$

$$\psi\frac{\partial \psi^*}{\partial t} = -\frac{i\hbar}{2m}\psi\nabla^2\psi^*$$

$\Rightarrow$ innsatt:

$$\nabla\cdot\vec{J} = \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi\nabla^2\psi^* - \psi^*\nabla^2\psi\right)$$

Og integrert: (m/ partiell integrasjon)

$$\boxed{\vec{J} = \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi\right)} \qquad (15.10)$$

Med (15.10) inn i (15.8) og $\psi^{(*)} \rightarrow \phi^{(*)}$:
Partiell integrasjon gir (oppgave 15.4):

$$\boxed{\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t}\right)} \qquad (15.11)$$

Helt forskjellig fra $\psi^*\psi$! (15.11)

OBS:

ρ kan bli negativ !

Og (15.2) har to løsninger:

$$\boxed{\begin{aligned} E &= \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \\ E &= -\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \end{aligned}}$$

← negativ !

Eksempel 15.2

Løsning av KG-likningen for en partikkel i ro.

$\vec{p} = 0 \Rightarrow -i\hbar\nabla\phi = 0$; innsatt i KG:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi = 0$$

Løsning, som krever to randbetingelser for å bestemme konstantene:

$$\phi = A_1 e^{imc^2t/\hbar} + A_2 e^{-imc^2t/\hbar} \qquad (15.12)$$

Energioperatoren $i\hbar(\partial/\partial t)$ gir da energiene hhv.

$E = -mc^2$ og $E = +mc^2$

---

2. ordens DL gir en ekstra frihetsgrad som ikke er tilstede hos Schrödinger. Krever ekstra randbetingelse.

Kan man finne en relativistisk DL som inneholder bare første ordens tidsderiverte ?

Ja:

%