15.2 Dirac-likningen

Konstruer en operator som tilsvarer (15.2), men første orden i alle operatorene.

Krev at hvis begge sider av likningen kvadreres, så gjenvinnes den relativistisk korrekte KG-likningen!

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi = \left[-i\hbar c\left(\alpha_1\frac{\partial}{\partial x}+\alpha_2\frac{\partial}{\partial y}+\alpha_3\frac{\partial}{\partial z}\right)+\beta mc^2\right]\psi$$

$$-\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \left(-i\hbar c\sum_{j=1}^{3}\alpha_j\nabla_j+\beta mc^2\right)\left(-i\hbar c\sum_{k=1}^{3}\alpha_k\nabla_k+\beta mc^2\right)\psi \qquad (15.13)$$

$$= \left(-\hbar^2c^2\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\alpha_j\alpha_k\nabla_j\nabla_k - i\hbar mc^3\sum_{j=1}^{3}(\beta\alpha_j+\alpha_j\beta)\nabla_j+\beta^2m^2c^4\right)\psi$$

$\nabla_1=\frac{\partial}{\partial x}$, $\nabla_2=\frac{\partial}{\partial y}$, $\nabla_3=\frac{\partial}{\partial z}$ er underforstått.

KG-likningen er

$$-\hbar^2\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\hbar^2c^2\nabla^2\phi+m^2c^4\phi$$

Hvis (15.13) skal reduseres til den, så må vi ha

$$\alpha_j\alpha_j = 1 \qquad (15.14)$$

$$\alpha_j\alpha_k+\alpha_k\alpha_j=0 \quad \text{for } j\neq k \qquad (15.15)$$

$$\beta\alpha_j+\alpha_j\beta=0 \qquad (15.16)$$

$$\beta^2=1 \qquad (15.17)$$

(15.15) og (15.16) er antikommutasjonsrelasjoner:

$$\{\alpha_j,\alpha_k\}=0 \quad \text{for } j\neq k$$
$$\{\beta,\alpha_j\}=0$$

MERK NOTASJONEN

Ingen relasjoner er oppfylt av tall, men matriser kan tilfredsstille dem!

Pauli-matrisene oppfyller (15.14) og (15.15), men for å få med β må 4x4-matriser innføres.

ψ blir da en fire-komponent-vektor.

Det konvensjonelle* valget, blant et ∞ antall mulige, er:

$$\boxed{\alpha_j=\begin{pmatrix}0 & \sigma_j\\ \sigma_j & 0\end{pmatrix}, \quad \beta=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix}}$$

*) NÅJA -- ikke nødvendigvis tilfelle om så lærebøker sier det

(eksempelvis:

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad)$$

Med notasjonen $\vec{\alpha}\cdot\nabla = \alpha_1\frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2\frac{\partial}{\partial y} + \alpha_3\frac{\partial}{\partial z}$ kan den opprinnelige første ordens DL skrives:

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -i\hbar c(\vec{\alpha}\cdot\nabla)\psi + \beta mc^2\psi} \quad \text{DIRAC-LIKNINGEN} \quad (15.18)$$

Her er

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

ψ_i'ene er funksjoner av posisjon og tid, og hvis alt skrives eksplisitt ut blir Dirac-likningen et sett av <u>4</u> likninger.

Sannsynlighetstetthet og sannsynlighetsstrøm, ifølge Dirac-likningen?

Ta den adjungerte av (15.18) (bruk hermitisitet):

$$-i\hbar\frac{\partial\psi^+}{\partial t} = i\hbar c(\nabla\psi^+)\cdot\vec{\alpha} + \psi^+\beta mc^2 \qquad (15.19)$$

Konstruer den tidsderiverte av produktet $\psi^+\psi$ ved å bruke (15.18) og (15.19):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\psi^+\psi) &= \psi^+\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi^+}{\partial t}\psi \\
&= \left.\begin{aligned}&\psi^+\left(-c(\vec{\alpha}\cdot\nabla)\psi - i\beta\frac{mc^2}{\hbar}\psi\right) \\ &+ \left(-c(\nabla\psi^+)\cdot\vec{\alpha} + \psi^+ i\beta\frac{mc^2}{\hbar}\right)\psi\end{aligned}\right\} \text{Kanselleringer!} \\
&= -c\left((\nabla\psi^+)\cdot\vec{\alpha}\psi + \psi^+(\vec{\alpha}\cdot\nabla)\psi\right) \\
&= -c\nabla\cdot(\psi^+\vec{\alpha}\psi) \qquad (15.20)
\end{aligned}$$

Sammenlikn med kontinuitetslikningen (15.8) og assosier:

$$\boxed{\begin{aligned}\rho &= \psi^+\psi \\ \vec{j} &= c\psi^+\vec{\alpha}\psi\end{aligned}}$$

Dette er sannsynlighetstetthet og -strøm for Dirac likningen!

Denne ρ'en er alltid ikke-negativ:

$$\rho = \psi^{+}\psi = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2$$ BRA!

Løsning for partikkel i ro:

$\vec{p} = 0 \Rightarrow -i\hbar c(\vec{\alpha}\cdot\nabla)\psi$:

$$i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t} = \beta mc^2\psi$$

Multipliser ut på høyre side, og få:

$$i\hbar \frac{\partial\psi_1}{\partial t} = mc^2\psi_1$$

$$i\hbar \frac{\partial\psi_2}{\partial t} = mc^2\psi_2$$

$$i\hbar \frac{\partial\psi_3}{\partial t} = -mc^2\psi_3$$

$$i\hbar \frac{\partial\psi_4}{\partial t} = -mc^2\psi_4$$

Løs for ψ'ene, sett på kolonnevektorform; dette gir 4 lineært uavhengige løsninger:

$$\psi = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} e^{-imc^2t/\hbar} \quad (15.21)$$

$$\psi = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} e^{-imc^2t/\hbar} \quad (15.22)$$

$$\psi = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} e^{imc^2t/\hbar}$$

$$\psi = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} e^{imc^2t/\hbar}$$

For de to første bruk energioperatoren og få:

$$E = mc^2$$

(15.21)/(15.22) representerer et to-komponent-objekt, en spinn-$\frac{1}{2}$-partikkel med hhv. $m_s = \frac{1}{2}$ og $m_s = -\frac{1}{2}$. Kombinasjoner ψ av spinn og rom-info kalles en SPINOR.

Tredje og fjerde lineært uavhengige Løsninger resulterer begge i

$$E = -mc^2$$ UHA

Hva med dem?

Diracs forslag:

I et "normalt" vakuum er alle $(E>0)$-tilstandene tomme, mens $(E<0)$-tilstandene er fylt av en "sjø" av elektroner.
Gi et slikt elektron et spark ("boost") så det rykker opp i en $(E>0)$-tilstand.
Tilbake blir et HULL med energi $E = -(-mc^2) = +mc^2$, et positron.

Dirac postulerte m.a.o. eksistensen av ANTIMATERIE.
I 1932 ble positronet funnet eksperimentelt av Carl Anderson, svensk ætt.
Han fikk i 1936 Nobelprisen for det samt for oppdagelsen av myonet, et "tungt elektron".

Når et elektron annihilerer med et positron, betyr det at det faller ned og fyller hullet i "negativ-energi-sjøen".

Dirac-likningen forutsier også at $g_s = 2$ (små korreksjoner skyldes kvantefeltteoretiske effekter).