KAPITTEL 7: MATEMATISK MELLOMSPILL C: MATRISER, DIRAC-NOTASJON, OG DIRACS DELTAFUNKSJON

7.1 Matriseformulering av lineære operatorer

Vi skal betrakte endelig-dimensjonale vektorrom, som inngår f.eks. i studiet av dreieimpuls.

Eksempelvis $j = 1/2$, dvs. $m_j \in \{-1/2, 1/2\}$
Representer dem med søylevektorer:

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad m_j = +1/2$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad m_j = -1/2$$

Generelt: $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ er en vektor i et n-dimensjonalt rom.

Da må de lineære operatorene være matriser!

Påminnelser:

A en $l \times m$ matrise, B en $m \times n$ matrise:

$$c_{jk} = \sum_{i=1}^{m} A_{ji} B_{ik} \qquad (7.1)$$

blir elementer i en $j \times k$ produktmatrise.

Eksempel 7.1

Matrisemultiplikasjon er ikke kommutativ:

IKKE NOE NYTT...

Med $A = \begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ og $B = \begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}$, får du

$$AB = \begin{pmatrix}19&22\\43&50\end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix}23&34\\31&46\end{pmatrix}$$

Egenverdier og egenvektorer i matriserepresentasjon:
Ta en matrise A som multipliserer søylevektor $\vec{x}$, med egenverdi c:

Innfør identitetsmatrisen I:

$$I = \begin{pmatrix}1&0&0&&\\0&1&0&&\\0&0&1&&\\&&&\ddots&0\\&&&0&1\end{pmatrix}$$

Få da:

$$A\vec{x} = c\vec{x} \tag{7.2}$$

$$A\vec{x} = cI\vec{x} \tag{7.3}$$

F. eks. i 3D:
Siden $I\vec{x} = \vec{x}$, fås

$$(A - cI)\vec{x} = 0 \tag{7.4}$$

$$\begin{pmatrix} A_{11}-c & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22}-c & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33}-c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bortsett fra løsningen $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, har vi løsninger hvor <u>determinanten</u> til $(A-cI)$ er lik 0:

$$\begin{vmatrix} A_{11}-c & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22}-c & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33}-c \end{vmatrix} = 0$$

For dimensjon $\underline{\underline{n}}$ fås $\underline{\underline{n}}$ komplekse egenverdier.

Eksempel 7.2

Egenverdier og egenvektorer for $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$?
Determinant, ekspansjon, løsning:

$$\begin{vmatrix} -c & 1 \\ 1 & -c \end{vmatrix} = 0$$

$$c^2 - 1 = 0$$

$$c = \pm 1$$

Sett inn $c = 1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_2 = x_1 \\ x_1 = x_2 \end{array}\right\} \text{to likninger}$$

Sett inn $c = -1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_2 = -x_1 \\ x_1 = -x_2 \end{array}\right\} \text{to likninger}$$

I begge tilfelle, en ekstra frihetsgrad (likningene er ikke uavhengige) tilsvarende at løsningen kan multipliseres med vilkårlig konstant.

For $c=1$: egenvektor $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ med egenverdi 1.

For $c=-1$: Egenvektor $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ med egenverdi -1
(husk at en alternativ løsning $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ ~~simpelthen tilsvarer~~ multiplikasjon med den sedvanlige frie ~~konstanten~~!)

Indre produkt
er identisk til prikkproduktet for 3D vektorer:

$$(\vec{x}|\vec{y}) = (x_1^* \ldots x_n^*)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} = x_1^* y_1 + \ldots + x_n^* y_n \qquad (7.5)$$

Med $\vec{x}=\vec{y}$ fås normaliseringskravet $(\vec{x}|\vec{x})=1$.

Eksempel 7.3
Normalisering av $\begin{pmatrix}1\\3\\2i\end{pmatrix}$

$$c^*(1 \;\; 3 \;\; -2i)\, c\begin{pmatrix}1\\3\\2i\end{pmatrix} = |c|^2(1+9+4) = 1$$

velg den positive reelle verdien $c = 1/\sqrt{14}$:

$$\vec{x} = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}1\\3\\2i\end{pmatrix}$$

Hvis innsetting av operator:

$$(\vec{x}|A\vec{y}) = (x_1^* \ldots x_n)\begin{pmatrix}A_{11} & \cdots\\ \vdots & \ddots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

Da kan vi definere den adjungerte av en matriseoperator:

$$(\vec{x}|A\vec{y}) = (A^+\vec{x}|\vec{y}) \qquad (7.7)$$

Skriv ut på komponentform:

$$\sum_{i,j=1}^{n} x_i^* A_{ij} y_j = \sum_{i,j=1}^{n} (A_{ij}^+ x_j)^* y_i$$

individuelle elementer i matrisen kommuterer

$$= \sum_{i,j=1}^{n} x_j^* A_{ij}^{+*} y_i$$

omdøping av navn på summevariable

$$= \sum_{i,j=1}^{n} x_i^* A_{ji}^{+*} y_j \qquad (7.8)$$

Altså:
Siden første og siste sum skal være identiske, må vi ha (veldig formelt!)

$$A_{ij} = A_{ji}^{+*}$$

eller:

$$\boxed{A^{\dagger}_{ij} = A^{*}_{ji}}$$

Den adjungerte til en matriseoperator tilsvarer den komplekse konjugerte transponerte av matrisen!

Eksempel 7.1

For operatoren $L = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -3 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$ fås den adjungerte $L^{\dagger} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -i & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$.

Matriser som tilsvarer Hermiteske operatorer må være selvadjungerte.
For reelle matriser, et symmetrikrav.
Men sjekk at disse to er selv-adjungerte: $L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $L_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

DIGRESJON!:
Hvis $L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ og $L_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, så er

$$[L_1, L_2] = 2i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2iL_3$$

Man kan sjekke videre at

$$\boxed{[L_i, L_j] = 2\varepsilon_{ijk}\, iL_k} \quad \text{(summekonvensjon)}$$

Det er ingen tilfeldighet at dette minner om kommutatorregelen for dreieimpuls. I kapittel 8 skal vi se at

$$S_x = \tfrac{1}{2}\hbar L_1,\ S_y = \tfrac{1}{2}\hbar L_2,\ S_z = \tfrac{1}{2}\hbar L_3$$

er en representasjon av operatorer for halvtallig spinn! L_1, L_2 og L_3 er Pauli-matrisene.

7.2 Dirac-notasjon

Vi har brukt $(f|g) = \int f^*(x)g(x)dx$ (∞ dim.)

og $(\vec{x}|\vec{y}) = x_1^* y_1 + \dots + x_n^* y_n$ (endelig dim.)

Nå:

Innføring av en generell notasjon for uspesifiserte abstrakte vektorrom, som egentlig beskriver det samme som i kapittel 5 – med noe attåt.

I Dirac-notasjonen står $|\psi\rangle$ for en generell vektor. $|\psi\rangle$-vektorene oppfyller alle egenskapene til et vektorrom, for eksempel:

$$|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle = |\psi_3\rangle$$

$$c|\phi_1\rangle = |\phi_2\rangle$$

$$\langle\phi|\psi\rangle \quad \text{– indre produkt}$$

$$\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \delta_{ij} \quad (\text{hvis } \{|\psi_i\rangle\} \text{ ortonormal basis})$$

Regelen som tilsvarer den for kartesiske vektorer

$$\vec{r} = (\vec{r}\cdot\hat{x})\hat{x} + (\vec{r}\cdot\hat{y})\hat{y} + (\vec{r}\cdot\hat{z})\hat{z}$$

blir

$$\boxed{|\phi\rangle = |\psi_1\rangle\langle\psi_1|\phi\rangle + \dots + |\psi_n\rangle\langle\psi_n|\phi\rangle} \qquad (7.9)$$

"skalarprodukt av vektor & enh.vektor"

"enhetsvektor"

Nå, notasjonstilføyelsen som kilbar med noe nytt:

$\boxed{\text{DET DUALE VEKTORROMMET, } \{\langle\phi|\}}$

Hvis $\{|\psi\rangle\}$ er et vektorrom, så er altså $\{\langle\psi|\}$ dets duale rom.

Som boka sier:

"$\langle\phi|$ er en størrelse som avbilder vektorrommet $|\psi\rangle$ på settet av komplekse tall"

$(\phi|$) ville være en mer klønete notasjon!

(clumsy)

Elementer i det duale rommet oppfyller

$$\langle\psi_1| + \langle\psi_2| = \langle\psi_3|$$

$$c\langle\phi_1| = \langle\phi_2|$$

osv.

Dermed, gå tilbake til dekomposisjonen i (7.9), som nå kan skrives:

$$|\phi\rangle = \left(\sum_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|\right)|\phi\rangle$$

eller

$$\boxed{\sum_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n| = 1}$$

For P en lineær operator, har vi som før

$$P(c|\psi\rangle) = cP|\psi\rangle$$

$$P(|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle) = P|\psi_1\rangle + P|\psi_2\rangle$$

Analogi til tidligere notasjon:

$$(\phi|P\psi) \rightarrow \langle\phi|P|\psi\rangle$$

Og:

$$\left(P|\psi\rangle\right)^\dagger = \langle\psi|P^\dagger$$

$|\psi\rangle$'ene med sine operatorer kan stå for endelig-dim. eller ∞ dim. rom, etter behov.

Tidsuavhengig SL:

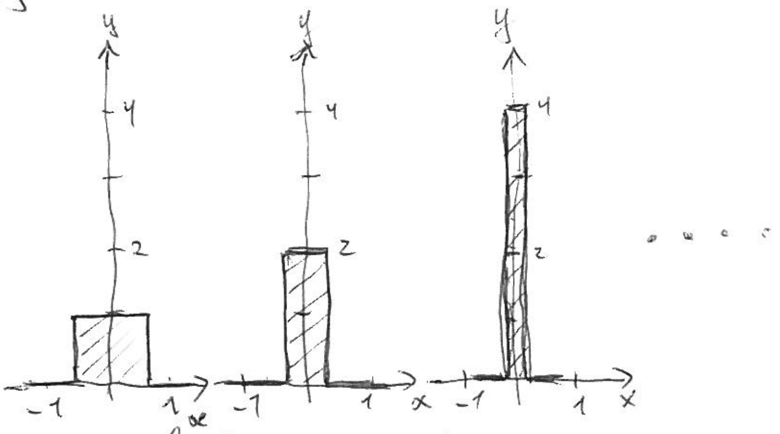
$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$$

Denne kan representere kjent SL med deriverte osv.

Men noen ganger kan den representere matrise-størrelser, som i kapittel 8!

7.3 Diracs deltafunksjon

Man kan forestille seg en følge av "stykkevis" konstante funksjoner med enhetsareal under:



I grensen av ∞ høy og ∞ smal topp oppnås Diracs δ-funksjon, som innlysende nok har de følgende egenskapene:

$$\boxed{\begin{aligned} \delta(x) &= \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \text{"}\infty\text{"} & x = 0 \end{cases} && (7.10) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx &= 1 && (7.11) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x)\,dx &= f(0) && (7.12) \end{aligned}}$$

Og tilsvarende:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x)\,dx = f(a) \qquad (7.13)$$

Kroneckerdeltaen fra tidligere er en diskret versjon; analogien til (7.13) blir

$$\sum_{i=1}^{\infty} \delta_{in} c_i = c_n$$

3D-versjon av Diracs δ-funksjon, med (7.13)-analogi:

$$\delta^3(\vec{r}) = \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)$$

$$\int \delta^3(\vec{r}-\vec{r}_0)\, f(\vec{r})\, d^3\vec{r} = f(\vec{r}_0)$$

Bruk i fysikk?
F. eks. idealiserte representasjoner av punktladningsfordelinger:

$$\rho(\vec{r}) = e\,\delta^3(\vec{r}-r_0)$$

$$Q = \int \rho(\vec{r})\, d^3r = e \int \delta^3(\vec{r}-\vec{r}_0)\, d^3\vec{r} = e$$

Det eksemplet er for en punktladning e ved $\vec{r} = \vec{r}_0$; $\rho(\vec{r})$ står for ladningstettheten.