KAPITTEL 8 :
SPINN-DREIEIMPULS

Merk:
Det gir villedende forestillinger å ~~betrakte~~ spinn som en virkelig indre rotasjon av en partikkel.
Mer hensiktsmessig å behandle spinn som en indre egenskap på linje med ladning eller masse.

8.1 Spinn-operatorer

Resultater fra avsnitt 6.2 kan anvendes direkte:

Operatorer S_x, S_y, S_z (komponentform)

$$S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} [S_x, S_y] &= i\hbar S_z \\ [S_z, S_x] &= i\hbar S_y \\ [S_y, S_z] &= i\hbar S_x \end{aligned}} \qquad \begin{aligned}(8.1)\\(8.2)\\(8.3)\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} S^2|\psi\rangle &= \hbar^2 s(s+1)|\psi\rangle \\ S_z|\psi\rangle &= \hbar m_s|\psi\rangle \end{aligned}} \qquad (8.4)$$

(Bare en komponent kan måles samtidig med $\vec{S}^2$)

Viktigste forskjeller:

* spinn-bølgefunksjoner er ikke "romlige"
* s har en gitt verdi for en partikkel; spinnet kan ikke økes eller minskes
* spinnet kan halvtallige verdier, noe banedreieimpulsen ikke kan ha:
  $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$

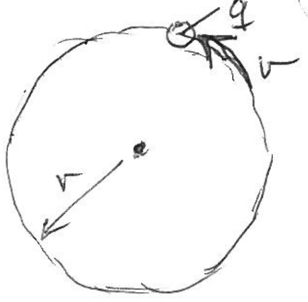
Alle typer elementærpartikler har et indre spinn, fra 0 og oppover.
Partikler med halvtallig spinn : fermioner
" " heltallig " : bosoner

Statistiske og andre typer egenskaper mellom de to typene er svært forskjellige!
"Vanlig materie" ($p, n, e, \mu, \ldots$) er fermioner ($s = \frac{1}{2}$), mens bosoner inkluderer fotonet ($s=1$), gluonet ($s=1$), pionet ($s=0$), og gravitonet ($s=2$) ifall det eksisterer.

8.2 Bevis for eksistens av spinn

En drøss av eksperimenter bekrefter idag eksistensen av spinn, men hvordan kunne "QM-pionerene" ha grunnlag for å anta at spinn fantes?

Sammenhengen mellom banedreieimpuls og dannelse av magnetfelt var kjent:



Strøm $I = \frac{qv}{2\pi r}$

Magnetisk moment
$$\mu = IA = \frac{qv}{2\pi r}\pi r^2 = \frac{1}{2}qvr$$

Dreieimpuls $L = mvr$

For elektron med ladning $-e$, dermed:

$$\mu = -\frac{e}{2m_e}L \qquad (8.5)$$

En størrelse kalt Bohr-magnetonet er hensiktsmessig å bruke:

$$\boxed{\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9.3\times10^{-24}\ \mathrm{A{\cdot}m}}$$

som gir $\mu = -\frac{\mu_B}{\hbar}L$ (husk, $\hbar$ og L samme benevning!)

Legg inn ekstra faktor g_l $(=1)$:

$$\boxed{\vec{\mu}_l = -\frac{g_l\mu_B}{\hbar}\vec{L}} \qquad (8.6)$$

Generalisert til spinn, har vi da:

$$\boxed{\vec{\mu}_s = -\frac{g_s\mu_B}{\hbar}\vec{S}} \qquad (8.7)$$

Eksperimentelt: Ikke lenger lik 1!

$$g_s = 2.00231930\,43718 \pm 0.000\,0000000076$$
(76)

En av de nøyaktigst målte størrelsene i naturvitenskapen!

Problemstillinger:

* Hvorfor <u>nesten</u> lik 2? (Finnes fra Dirac-likninga i relativistisk kvantemekanikk) (Kap. 15)

* Hvorfor <u>ikke eksakt</u> lik 2? (Forklart av R. P. Feynman med kvantefeltteori seint på 1940-tallet)

Avviket fra 2 kalles <u>anomalt magnetisk moment</u>.

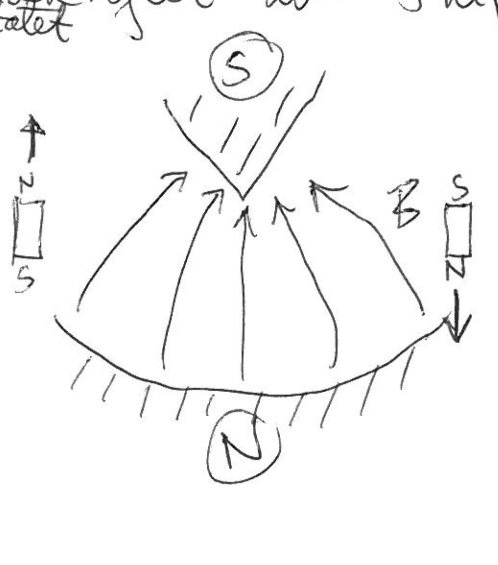
De ovennevnte <u>klassiske</u> argumentene må sjekkes mot <u>eksperimentelle</u> data.

Eksperimenter viser: (for H-atomet)

Enkelte av de antatt degenererte energinivåene <u>er ikke</u> degenererte, men <u>splittet</u> med bittesmå energimengder.

Splittingen kan forklares ved <u>vekselvirkning</u> mellom $\vec{\mu}_s$ og $\vec{\mu}_\ell$.
(Beregninger, se kap. 9! De gir "rett svar"!)
En slik mekanisme virker bare hvis elektronet har <u>både</u> banedreieimpuls <u>og</u> spinn.
Prediksjon: Goudsmit & Uhlenbeck, 1925 — og den er nå anerkjent å være korrekt.

Mer direkte ("renere") støtte for spinnets magnetiske moment kommer fra <u>Stern-Gerlach-eksperimentet</u> (opprinnelig 1922, resultatet bekreftet av Phipps og Taylor 1927).



(Klassisk:
Det inhomogene B-feltet i figuren vil gi netto krefter på en magnet, som antydet.)

Ideell dipol $\vec{\mu}$ i inhomogent felt:

$$\vec{F} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial z}\hat{z} \quad (\vec{B} \text{ i z-retning})$$

Potensiell energi:

$$V = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$$

Kraft på dipol, dermed:

$$\vec{F} = \frac{\partial B_z}{\partial z}\mu_z \hat{z} \qquad (8.8)$$

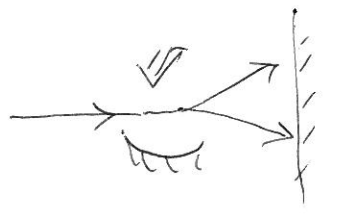
Argument, nå:

> Skyt en stråle av atomer gjennom et inhomogent felt som på figuren.
> Hvis intet spinn:
> $$\mu_{lz} = -\frac{g_l \mu_B}{\hbar} L_z$$
> Og strålen bør bli splittet i $(2l+1)$ diskrete stråler

Dette fordi hvis atomet er i en egentilstand, så

$$L_z|l\, m_l\rangle = \hbar m_l |l\, m_l\rangle$$

Stern & Gerlach brukte Ag-atomer; fant <u>2 bånd</u> på skjermen bak magneten.



Phipps & Taylor brukte H-atomer ($l=0$ og $m_l=0$ i grunntilstanden), fant også <u>2 bånd</u>!

Forklares hvis elektronet har spinn:

$$S_z|s\, m_s\rangle = \hbar m_s |s\, m_s\rangle$$

Bare to bånd krever $m_s = \pm\frac{1}{2}$, og altså

$$\boxed{s = \tfrac{1}{2} \text{ for elektronet!}}$$

8.3 Addisjon av dreieimpulser

Banedreieimpuls og spinn adderer seg til <u>total dreieimpuls</u> $\vec{J}$:

$$\boxed{\vec{J} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{L} + \vec{S}} \qquad (8.9)$$

Egentilstand for $\vec{J}$ og J_z, $|j m_j\rangle$, må oppfylle:

$$\boxed{\begin{aligned} J^2 |j m_j\rangle &= \hbar^2 j(j+1) |j m_j\rangle \\ J_z |j m_j\rangle &= \hbar m_j |j m_j\rangle \end{aligned}} \qquad (8.10)$$

For tilstand med kvantetall l, m_l, s og m_s:
Siden

$$J_z = L_z + S_z$$

fås

$$L_z |m_l m_s\rangle = \hbar m_l |m_l m_s\rangle$$
$$S_z |m_l m_s\rangle = \hbar m_s |m_l m_s\rangle$$

og

$$J_z |m_l m_s\rangle = (L_z + S_z) |m_l m_s\rangle = \hbar (m_l + m_s) |m_l m_s\rangle$$

$\Rightarrow$ <u>additivitet</u>:

$$\boxed{m_j = m_l + m_s} \qquad (8.11)$$

<u>Mulige</u> j-verdier?

$m_l \le l$ og $m_s \le s$ $\Rightarrow$ $m_j \le l + s$ (8.12)

$m_j \le j$ $\Rightarrow$ hvis $\boxed{j \le l + s}$ <u>så automatisk</u> ~~oppfylling~~

Stemmer med <u>klassisk</u> <u>øvre</u> grense:

$$|\vec{J}| = |\vec{L}| + |\vec{S}| \quad \text{hvis parallelle}$$

Klassisk <u>nedre</u> grense:

$$|\vec{J}| = \big||\vec{L}| - |\vec{S}|\big| \quad \text{hvis antiparallelle}$$

Suggestiv kvanteanalogi:

$$j \ge |l - s|$$

Bare heltallige skritt mellom $|l-s|$ og $l+s$!
Dette fordi m_l og m_s bare kan variere med heltallige skritt hver for seg!

Summa summarum:

$$\boxed{j = |l-s|,\ |l-s|+1, \ldots, l+s-1,\ l+s} \tag{8.13}$$

Eksempel 8.1

H-atom med $l=1$ for elektronet; hvilke mulige j og m_j?

$s = 1/2,\ l = 1 \Rightarrow$

$$j = 1/2 \text{ eller } j = 3/2$$

Altså:

$$j = 1/2 \Rightarrow m_j = -1/2,\ +1/2$$
$$j = 3/2 \Rightarrow m_j = -3/2,\ -1/2,\ 1/2,\ 3/2$$

Hvis to spinn skal adderes (f.eks. e og p i H-atomet)

$$s = |s_1 - s_2|,\ |s_1 - s_2| + 1, \ldots, s_1 + s_2 - 1,\ s_1 + s_2$$

Hvis $s_1 = s_2 = 1/2$:

$$s = 0 \Rightarrow m_s = 0 \quad \text{singlett-tilstand}$$
$$s = 1 \Rightarrow m_s = -1, 0, 1 \quad \text{triplett-tilstand}$$