8.4 Matriserepresentasjon av spinn

Ta ~~et~~ elektron, ~~som~~ har spinn $s = \frac{1}{2}$ og to mulige m_s-verdier ;

$$m_s = \pm \frac{1}{2}$$

Kan oppfattes som to orienteringer – "spinn opp", "spinn ned":

$$S_z |\downarrow\rangle = -\frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle$$
$$S_z |\uparrow\rangle = +\frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle$$

endelig tilstandsantall (2), gir mulighet for representasjon i 2D vektorrom av søylevektorer:

$$|\uparrow\rangle \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \text{spinn opp}$$
$$|\downarrow\rangle \Leftrightarrow \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad \text{" ned}$$

Disse danner et ortonormalt basissett:

$$\langle\uparrow|\uparrow\rangle = (1\ 0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 1$$
$$\left.\begin{aligned}\langle\downarrow|\downarrow\rangle &= \quad = 1\\ \langle\uparrow|\downarrow\rangle &= \quad = 0\\ \langle\downarrow|\uparrow\rangle &= \quad = 0\end{aligned}\right\}\text{ lett å sjekke !}$$

[Lett å utvide til 3D vektorrom for $s = 1$:

$$\left.\begin{aligned}|s=1, m_s=1\rangle &\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\\ |s=1, m_s=0\rangle &\Leftrightarrow \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\\ |s=1, m_s=-1\rangle &\Leftrightarrow \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\end{aligned}\right\}$$

Men vi skal ikke bry oss mer om dette her! (og nå)]

Nå:

Spinnoperatorene S_x, S_y, S_z – må være 2×2 matriser.

Betrakt 2×2 matrise A. Individuelle matriseelementer finnes, eksempelvis, ~~som~~:

$$(1\quad 0)\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = A_{11}$$
$$(0\quad 1)\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = A_{21}$$

Generelt:

$$\underset{\text{posisjon } i}{(0\ 0\ \ldots\ 1\ \ldots\ 0)}\ \Big(A\Big)\underset{\text{posisjon } j}{\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\1\\ \vdots\\0\end{pmatrix}} = A_{ij}$$

Matriseelementer for S_z, dermed:

$$S_{z11} = \langle\uparrow|S_z|\uparrow\rangle = \langle\uparrow|\tfrac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle = \tfrac{\hbar}{2}\langle\uparrow|\uparrow\rangle = \tfrac{\hbar}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} S_{z12} &= \qquad = 0 \\ S_{z21} &= \qquad = 0 \\ S_{z22} &= \qquad = -\tfrac{\hbar}{2} \end{aligned}\right\}\text{ lett å sjekke!}$$

Vi har funnet:

$$\boxed{S_z = \begin{pmatrix} \hbar/2 & 0 \\ 0 & -\hbar/2 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

Eksempel 8.2

~~For~~ egenverdiene, trivielt nok:

$$S_z|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} \hbar/2 & 0 \\ 0 & -\hbar/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle$$

$$S_z|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} \hbar/2 & 0 \\ 0 & -\hbar/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle$$

Representasjonen for S_x og S_y?
Her tyr vi til spinn-stigeoperatorer, som i avsnitt 6.2 for banedreieimpuls. Med helt analog definisjon,

$$\boxed{\begin{aligned} S_+ &= S_x + iS_y \\ S_- &= S_x - iS_y \end{aligned}}$$

De utfører det følgende:

$$S_-|s\ m_s\rangle \propto |s\ m_s-1\rangle \qquad (8.14)$$

$$S_+|s\ m_s\rangle \propto |s\ m_s+1\rangle \qquad (8.15)$$

Og de kan ikke heve m_s over sin høyeste verdi, eller senke m_s under sin laveste! (Gir 0!)

Her trengs proporsjonalitetskonstanter.
Pga. hermitisiteten:

$$S_-^\dagger = S_+$$
$$S_+^\dagger = S_-$$

Dvs. hvis

$$S_-|s\ m_s\rangle = c\,|s\ m_s-1\rangle \qquad (8.16)$$

så dual relasjon:

$$\langle s\ m_s|\,S_+ = \langle s\ m_s-1|\,c^* \qquad (8.17)$$

Indre produkt:

$$\langle s\ m_s|S_+S_-|s\ m_s\rangle = c^*c\,\langle s\ m_s-1|s\ m_s-1\rangle = |c|^2 \qquad (8.18)$$

Sett inn for S_+ og S_-, bruk Pythagoras, og få:

$$\begin{aligned} S_+S_- &= (S_x + iS_y)(S_x - iS_y) \\ &= S_x^2 + S_y^2 - i\underbrace{[S_x, S_y]}_{(i\hbar S_z)} \\ &= S^2 - S_z^2 + \hbar S_z \end{aligned}$$

(8.18), om igjen:

$$\langle s\, m_s | S^2 - S_z^2 + \hbar S_z | s\, m_s \rangle = |c|^2$$

Altså, og med tilsvarende regning for S_-S_+:

$$|c|^2 = \hbar^2 [s(s+1) - m_s^2 + m_s]$$

$\Rightarrow$ for (8.16):

$$\boxed{S_\mp |s\, m_s\rangle = \hbar \sqrt{s(s+1) - m_s(m_s \mp 1)}\, |s\, m_s \mp 1\rangle} \qquad (8.19)$$

Men for $s = \frac{1}{2}$ har vi <u>kun</u>

$$S_-|\uparrow\rangle = \hbar|\downarrow\rangle, \quad S_+|\downarrow\rangle = \hbar|\uparrow\rangle$$

På grunn av relasjonene

$$S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-) \qquad (8.20)$$

$$S_y = \frac{1}{2i}(S_+ - S_-) \qquad (8.21)$$

følger matrisene for S_x og S_y ganske enkelt.

$$\begin{aligned} S_{+11} &= \langle\uparrow|S_+|\uparrow\rangle = \ldots\ldots = 0 \\ S_{+12} &= \langle\uparrow|S_+|\downarrow\rangle = \langle\uparrow|\hbar|\uparrow\rangle = \hbar\langle\uparrow|\uparrow\rangle = \hbar \\ S_{+21} &= \langle\downarrow|S_+|\uparrow\rangle = \ldots\ldots = 0 \\ S_{+22} &= \langle\downarrow|S_+|\uparrow\rangle = \ldots\ldots = 0 \end{aligned}$$

$$S_{-21} = \langle\downarrow|S_-|\uparrow\rangle = \langle\downarrow|\hbar|\downarrow\rangle = \hbar\langle\downarrow|\downarrow\rangle = \hbar$$

$$\left.\begin{aligned} S_{-22} &= \\ S_{-12} &= \\ S_{-11} &= \end{aligned}\right\} = 0 \text{ (alle sammen)}$$

Da får du:

$$S_+ = \begin{pmatrix} 0 & \hbar \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \hbar & 0 \end{pmatrix}$$

Og av det:

$$S_x = \begin{pmatrix} 0 & \hbar/2 \\ \hbar/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \begin{pmatrix} 0 & -i\hbar/2 \\ i\hbar/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Uttrykt ved Paulimatrisene

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

er altså

$$\boxed{S_x = \tfrac{1}{2}\hbar\sigma_x, \quad S_y = \tfrac{1}{2}\hbar\sigma_y, \quad S_z = \tfrac{1}{2}\sigma_z}$$

Egenverdier og egenvektorer –

Allerede funnet for S_z:

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ egenverdi } = +\frac{\hbar}{2}$$

$$|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{"} \quad = -\frac{\hbar}{2}$$

For S_x og S_y, determinantutregning:

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -c & \hbar/2 \\ \frac{\hbar}{2} & -c \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow c = \pm\frac{\hbar}{2}$$

Selvfølgelig samme egenverdier som for S_z; ingen foretrukken retning, og koordinatsystemet kan dreies!

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \pm\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{\hbar}{2}\psi_2 = \pm\frac{\hbar}{2}\psi_1 \\ \frac{\hbar}{2}\psi_1 = \pm\frac{\hbar}{2}\psi_2 \end{array}$$

Velg egenvektorer $|\rightarrow\rangle$ og $|\leftarrow\rangle$; trivielt nok å finne

$$|\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{egenverdi } \tfrac{\hbar}{2}) \tag{8.22}$$

$$|\leftarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (\quad \text{"} \quad -\tfrac{\hbar}{2}) \tag{8.23}$$

Trivielt nok å finne det tilsvarende for S_y (gitt som oppgave 8.4):

$$|\nearrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad (+y\text{-retning}) \tag{8.24}$$

$$|\swarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad (-y\text{-retning}) \tag{8.25}$$

$|\uparrow\rangle$ og $|\downarrow\rangle$ for S_z, danner ortonormalt basissett for alle vektorene.

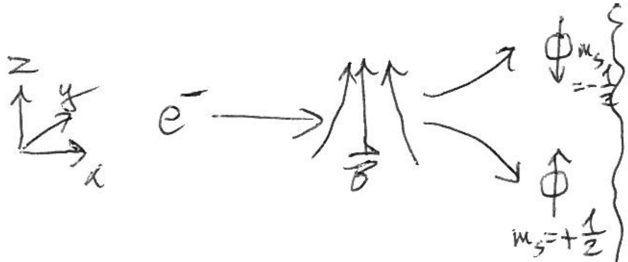
For eksempel for S_x-egenvektorene:

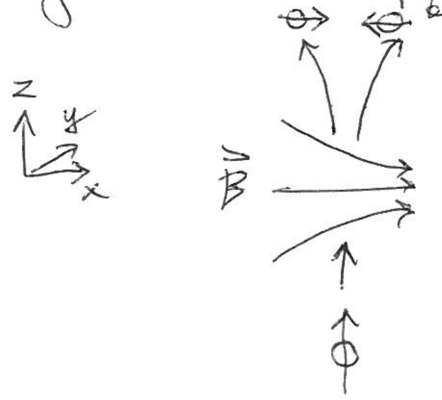
$$|\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$$
$$|\leftarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)$$

Merkelig nok:
En partikkel med spinn i x- eller (-x)-retning er en lineærkombinasjon av tilstander med spinn i +z- eller (-z)-retning!

8.5 Stern-Gerlach-eksperimentet

Idealisert:
En elektronstråle på tvers av et magnetfelt med varierende styrke i feltretningen, får en avbøyning som avhenger av spinnretningen. Samme om feltet har z- eller x-retning. Men la nå spinnet være bare opp:





$$\vec F = \frac{\partial B_z}{\partial z}\mu_z \hat z$$
$$\mu_{ez} = -\frac{g_e \mu_B L_z}{\hbar} \text{ (hvis banedreieimpuls)}$$

(Se sist i avsnitt 8.2)

Dette skjer ved at de innkommende elektronene i dette andre S-G-eksperimentet er utgående $|\uparrow\rangle$-elektroner fra det første.

Også i eksperiment nr. 2 i rekken, en splitting fås i "opp" og "ned" langs $\hat x$-rettet felt.

Forklaring:
Elektronene kan ikke samtidig være i en tilstand med definitt S_z og definitt S_x.

./.

Men $|\uparrow\rangle$ fra det første er en lineærkombinasjon av $|\rightarrow\rangle$ og $\langle\leftarrow|$. Eksperiment nr. 2 i rekken „ser" en slik blanding, og skiller strålen inn i disse to tilstandene.

I Dirac-notasjon:
Hvis partikkel i ~~tilstand~~ $|\psi\rangle$, og man måler for å se om den er i $|\phi\rangle$ eller ikke, så er sannsynligheten

$$\boxed{P = |\langle\phi|\psi\rangle|^2}$$

Eksempel 8.3
Hvis opprinnelig i $|\uparrow\rangle$, og måles i x-retning, hva er ssh. for å finne den i (+x)-retning?

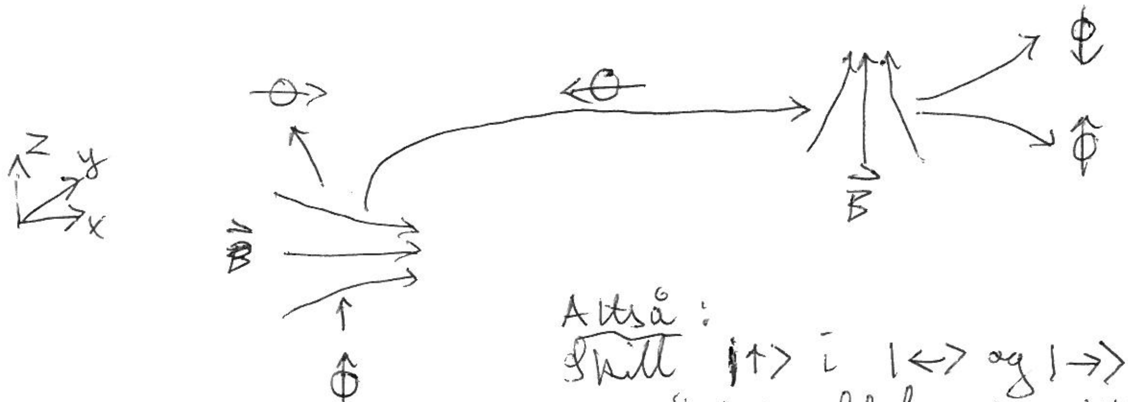
Husk:

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad |\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Det gir

$$P = |\langle\rightarrow|\uparrow\rangle|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}(1\ \ 1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right|^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Men anta så at strålen fra annet eksperiment splittes ved et tredje eksperiment:



Altså:
Skill $|\uparrow\rangle$ i $|\leftarrow\rangle$ og $|\rightarrow\rangle$,
ta så $|\rightarrow\rangle$-elektronene tilbake gjennom et eksperiment som skiller dem etter z-komponenten av spinnet.

Klassisk forventning:
Det tredje eksperimentet skulle produsere en stråle med spinn i (+z)-retning.

Eksperimentelt resultat, imidlertid:
Tredje eksperiment skiller dem i en stråle med (+z)-spinn og den annen med (-z)-spinn!

Årsak:

$|\rightarrow\rangle$ er blandinga $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle+|\downarrow\rangle)$.
$|\downarrow\rangle$ - komponenten er "addert på plass" igjen før vi måler tredje gang.

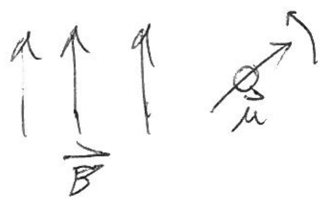
Selve målehandlinga forandrer tilstanden!

Et ikke-klassisk resultat:

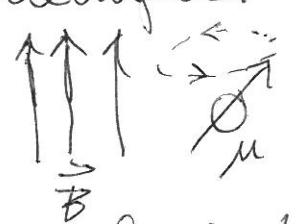
$\boxed{\text{Det er umulig å unngå å forandre tilstanden til et system ved å utføre en måling på det!}}$

8.6 Spinn-presesjon

Nå:
Et eksempel på introduksjon av spinn i Schrödinger-likninga.



Dipol $\vec{\mu}$ i felt $\vec{B}$ gir vrimoment $\vec{\mu}\times\vec{B}$, i innrettende retning, klassisk. Men det medfører presesjon i retning ⊥ dreieimpuls:



Prøv tidsavhengig SL, med potensial

$$V = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$$

$$H|\psi\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle \qquad (8.26)$$

elektronet i ro $\Rightarrow$ ikke kinetisk energi.

$$\vec{\mu} = -\frac{g\mu_B}{\hbar}\vec{S}, \quad g = 2$$

$\Rightarrow$
$$V = \frac{2\mu_B}{\hbar}\vec{B}\cdot\vec{S}$$

Med $\vec{B} = B_z\hat{z}$:
$$\vec{B}\cdot\vec{S} = BS_z, \quad S_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z$$

$\Rightarrow$
$$V = \mu_B B\sigma_z$$

og SL:
$$\boxed{\mu_B B\sigma_z|\psi\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle} \qquad (8.27)$$

$|\psi\rangle$ blir 2-komponent vektor:
$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix}\psi_+\\ \psi_-\end{pmatrix} \qquad (\psi_\pm \text{ tidsavhengige})$$

$$\mu_B B\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_+\\ \psi_-\end{pmatrix} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\psi_+\\ \psi_-\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}\mu_B B\,\psi_+ &= i\hbar\frac{d\psi_+}{dt}\\ \mu_B B(-\psi_-) &= i\hbar\frac{d\psi_-}{dt}\end{aligned}\right\} \text{ 2 vanlige DL}$$

Generelle løsninger, om på matriseform:
$$\boxed{|\psi\rangle = \begin{matrix}A_+e^{-i(\mu_B B/\hbar)t}\\ A_-e^{i(\mu_B B/\hbar)t}\end{matrix}} \qquad (8.28)$$

Initialbetingelse:
$$|\psi(t=0)\rangle = \begin{pmatrix}A_+\\ A_-\end{pmatrix}$$

Hvis $\begin{pmatrix}A_+\\ A_-\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$: Tidsutvikling og ~~sannsynlighet~~

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix}e^{-(\mu_B B/\hbar)t}\\ 0\end{pmatrix}, \quad P = \left|(1\ 0)\begin{pmatrix}e^{i\omega}\\ 0\end{pmatrix}\right|^2 = 1$$

<u>Dette er</u> $P = |\langle\uparrow|\psi(t)\rangle|^2$;
<u>er elektronet i</u> $|\uparrow\rangle$, ~~så~~ vil det ~~fortsette~~ å være der
<u>for all framtid</u>!

Hvis i ~~stedet~~ startspinn i (+x)-retning:

$$|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \quad |\psi\rangle = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i(\mu_B B/\hbar)t}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(\mu_B B/\hbar)t}\end{pmatrix}$$

Sett

$$\boxed{\omega = 2\mu_B B/\hbar} \qquad \text{(enhet 1/tid)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{-i(\omega/2)t}\\ e^{i(\omega/2)t}\end{pmatrix}}$$

$|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$; la tida løpe:

fasefaktor

$$|\psi(t=2\pi/\omega)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}e^{-i\pi}\\e^{i\pi}\end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad \boxed{\text{fremdeles (+x)-retning}}$$

$$|\psi(t=\tfrac{1}{2}\tfrac{2\pi}{\omega})\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}e^{-i\pi/2}\\e^{i\pi/2}\end{pmatrix} = -i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \qquad \boxed{\text{nå i (−x)-retning}}$$

$$|\psi(t=\tfrac{1}{4}\tfrac{2\pi}{\omega})\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}e^{-i\pi/4}\\e^{i\pi/4}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1-i)\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} \qquad \boxed{\text{nå i (+y)-retning}}$$

$|\psi(t=\frac{3}{4}\frac{2\pi}{\omega})\rangle$ gir (−y)-retning osv. osv.

Alt i alt:

> Elektronspinnet har en rotasjon (presesjon) mot klokka i xy-planet, med periode $2\pi/\omega$

Nyttig!!

> ~~Dette~~ fenomenet er basis for MRI (magnetisk resonans avbildning)