8.7 Spinn-systemer med to partikler

Først, uten spinn-avhengig vekselvirkning.

Ikke vekselvirkende spinn

To spinn her, begge $s = 1/2$. Operatorer $\vec{S}_1$ og $\vec{S}_2$.
Betrakt egenfunksjoner for S_1^2, S_2^2, S_{1z} og S_{2z}.
Notasjon nå:

$$|m_{s1}\, m_{s2}\rangle$$

Dvs.

$$S_{1z}|\uparrow\downarrow\rangle = +\frac{\hbar}{2}|\uparrow\downarrow\rangle$$
$$S_{2z}|\uparrow\downarrow\rangle = -\frac{\hbar}{2}|\uparrow\downarrow\rangle$$

Spesifikasjon av S_1^2 og S_2^2 nødvendig:

$$S_1^2|\uparrow\downarrow\rangle = \hbar^2\,\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)|\uparrow\downarrow\rangle$$
$$S_2^2|\uparrow\downarrow\rangle = \hbar^2\,\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)|\uparrow\downarrow\rangle$$

For totalspinnet:

$$\boxed{\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2}$$

$$S_z = S_{z1} + S_{z2}$$

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2\,\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2 \qquad (8.29)$$

Totale kvantetall

$$m_s = m_{s1} + m_{s2}$$
$$s = 0 \text{ eller } 1$$

$\Rightarrow$ alternativ spesifikasjon av totaltilstanden:

$$|s\, m_s\rangle$$

$s = 0 \Rightarrow m_s = 0,\quad |0\,0\rangle$ singlett-tilstand

$s = 1 \Rightarrow m_s = -1,\quad |1\,-1\rangle$
$ = 0,\quad |1\,0\rangle$
$ = 1,\quad |1\,1\rangle$ } triplett-tilstand

Vi kan ikke samtidig måle s, m_s, m_{1s}, m_{2s} fordi ikke alle operatorene S^2, S_z, S_{1z} og S_{2z} kommuterer:

$$2\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = 2(S_{1x}S_{2x} + S_{1y}S_{2y} + S_{1z}S_{2z})$$

$$[S^2, S_{1z}] = [S_1^2 + S_2^2 + 2(\ldots), S_{1z}]$$

$$= 2[S_{1x}, S_{1z}]S_{2x} + 2[S_{1y}, S_{1z}]S_{2y}$$

$$= -2i\hbar S_{1y}S_{2x} + 2i\hbar S_{1x}S_{2y}$$

$$[S^2, S_{2z}] = \{\text{tilsvarende likker ikke kommutering}\}$$

$\Rightarrow$

Partiklene kan være i en tilstand hvor begge z-komponentene er kjent ($|m_{s1}\, m_{s2}\rangle$),
eller i en tilstand hvor s og m_s er kjent ($|s\, m_s\rangle$),
men ikke samtidig!

De 4 mulige $|m_{1s}\, m_{2s}\rangle$ danner et basis-sett, så $|s\, m_s\rangle$ kan skrives som lineærkombinasjoner av dem:

$$|s\, m_s\rangle = c_1|\uparrow\uparrow\rangle + c_2|\uparrow\downarrow\rangle + c_3|\downarrow\uparrow\rangle + c_4|\downarrow\downarrow\rangle \quad (8.30)$$

kan beregnes

Likninga kan gi sannsynligheta for å finne en gitt verdi av m_{1s} og m_{2s}.

Enkelt nok:

$$\boxed{\begin{aligned} |1\,1\rangle &= |\uparrow\uparrow\rangle \\ |1\,-1\rangle &= |\downarrow\downarrow\rangle \end{aligned}} \quad \begin{aligned}(8.31)\\(8.32)\end{aligned}$$

$|1\,0\rangle$ og $|0\,0\rangle$ må derimot medføre lineærkombinasjoner:
Bruk stigeoperatorer.

$$S_- = S_x - iS_y \quad \Rightarrow \quad S_- = S_{1-} + S_{2-}$$

$$S_-|1\,1\rangle = S_{1-}|\uparrow\uparrow\rangle + S_{2-}|\uparrow\uparrow\rangle$$

$$\hbar\sqrt{1(1+1) - 1(1-1)}\,|1\,0\rangle = \hbar\sqrt{\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+1) - \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}-1)}\,|\downarrow\uparrow\rangle$$
$$+ \hbar\sqrt{\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+1) - \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}-1)}\,|\uparrow\downarrow\rangle$$

$$\boxed{|1\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle\right)} \tag{8.33}$$

Må tilsvarende ha (opp til multiplikativ faktor):

$$\boxed{|0\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle\right)} \tag{8.34}$$

Tilsvarende gjelder for partikler med andre spinn – konstantene som inngår kalles generelt Clebsch-Gordan-koeffisienter.

Eksempel 8.4

To spinn $\frac{1}{2}$ i singlettilstand; hva er ssh. for å måle $m_{1s} = +\frac{1}{2}$?

$$P = \Big|\langle\uparrow\downarrow|\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\uparrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\downarrow\rangle\right)}_{|0\,0\rangle}\Big|^2$$

$$= \underline{\frac{1}{2}}$$

Vekselvirkende spinn

Nå antas spinnene å inngå i Hamiltonfunksjonen. En av de enklest mulige spinn-spinn-v.v. er

$$\boxed{H = \lambda\,\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2} \tag{8.36}$$

(anta spinnene fastgjort til ~~sted~~ i rommet, ingen annen v.v.)

H kommuterer ikke med S_{1z} eller med S_{2z}. Derimot:

$$\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2 = \frac{1}{2}\left(S^2 - S_1^2 - S_2^2\right)$$

dvs.

$$H = \frac{1}{2}\lambda\left(S^2 - S_1^2 - S_2^2\right)$$

og den kommuterer på den formen med S^2 og S_z!

$|s\,m_s\rangle$ må altså være egentilstander for H!

./.

Energier kan finnes:

$$H|s\,m_s\rangle = \frac{1}{2}\lambda\hbar^2\left[s(s+1) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\right]|s\,m_s\rangle$$
$$= \frac{1}{2}\lambda\hbar^2\left[s(s+1) - \frac{3}{2}\right]|s\,m_s\rangle$$

$s=1$ (triplett) $\Rightarrow$ $E = \frac{1}{4}\lambda\hbar^2$
$s=0$ (singlett) $\Rightarrow$ $E = -\frac{3}{4}\lambda\hbar^2$

uavh. av m_s! triplett tilstandene er degenererte!

Eksempel 8.5

Magnetisk dipol-dipol-v.v. mellom to partikler

For to partikler med magnetiske momenter $\vec{\mu}_1$ og $\vec{\mu}_2$ og romlig separasjon $\vec{r}$, samt avstand a, og:

$$\vec{\mu} = \frac{g_n e}{2m_n}\vec{S} \quad \text{(nøytroner)}$$

$$H = \frac{\vec{\mu}_1\cdot\vec{\mu}_2}{r^3} - 3\frac{(\vec{\mu}_1\cdot\vec{r})(\vec{\mu}_2\cdot\vec{r})}{r^5}$$
$$= \left(\frac{g_n e}{2m_n}\right)^2\left(\frac{\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2}{r^3} - 3\frac{(\vec{S}_1\cdot\vec{r})(\vec{S}_2\cdot\vec{r})}{r^5}\right)$$

Velg $\vec{r} = a\hat{z}$, $r = a$:

$$H = \left(\frac{g_n e}{2m_n}\right)^2\frac{1}{a^3}\left(\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2 - 3S_{1z}S_{2z}\right)$$

Omskriv som før:

$$H = \left(\frac{g_n e}{2m_n}\right)^2\frac{1}{a^3}\left(\frac{1}{2}\left(S^2 - S_1^2 - S_2^2\right) - \frac{3}{2}\left(S_z^2 - S_{1z}^2 - S_{2z}^2\right)\right) \tag{8.37}$$

Nøytroner i $|s\,m_s\rangle$ $\Rightarrow$ tilstanden er H-egenfunksjon.

(Merk:

$$S_z^2|\uparrow\rangle = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2|\uparrow\rangle$$
$$S_z^2|\downarrow\rangle = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2|\downarrow\rangle$$

så man får alltid egenverdi $\frac{\hbar^2}{4}$.)

Anvend nå på $|s\,m_s\rangle$:

$\circ/\circ$

$$H|s\,m_s\rangle = \left(\frac{g_n e}{2m_n}\right)^2 \frac{1}{a^3}\Big(\tfrac{1}{2}(\underbrace{S^2}_{\hbar^2 s(s+1)} - \underbrace{S_1^2}_{\hbar^2\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)} - \underbrace{S_2^2}_{\hbar^2\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)}) - \tfrac{3}{2}(\underbrace{S_z^2}_{\hbar^2 m_s^2} - \underbrace{S_{1z}^2}_{\hbar^2(\frac{1}{2})^2} - \underbrace{S_{2z}^2}_{\hbar^2(\frac{1}{2})^2})\Big)|s\,m_s\rangle$$

$$= \frac{g_n^2 e^2 \hbar^2}{8 m_n^2 a^3}\left[s(s+1) - 3m_s^2\right]|s\,m_s\rangle$$

Eller, energinivåene er:

$$\boxed{E = \frac{g_n^2 e^2 \hbar^2}{8 m_n^2 a^3}\left[s(s+1) - 3m_s^2\right]}$$

Dipol-dipol-v.v. splitter alle $|s\,m_s\rangle$ i distinkte energinivåer, unntatt $m_s = \pm 1$ som fortsatt er degenerert.

$s = 1,\ m_s = \pm 1: \quad E = \frac{g_n^2 e^2 \hbar^2}{8 m_n^2 a^3}(-1)$

$s = 0,\ m_s = 0: \quad E = 0$

$s = 1,\ m_s = 0: \quad E = \frac{g_n^2 e^2 \hbar^2}{8 m_n^2 a^3}(2)$

Dipol-dipol-v.v. mellom p og e skaper hyperfinsplitting i hydrogen.

Som nevnt i kapittel 9 side 217:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Triplett-tilstanden i hydrogen}\\ \text{har en energi } \Delta E = 5.9\times10^{-6}\,\text{eV}\\ \text{høyere enn singlett-tilstanden.}\\ \text{Overganger Triplett} \rightarrow \text{singlett i}\\ \text{nøytrale H-gass-skyer i}\\ \text{universet gir opphav til } \lambda\\ = 21\text{ cm; "21-cm-linjen"}\end{array}}$$