KAPITTEL 2: KOMPLEKSE TALL OG LINEÆRE OPERATORER

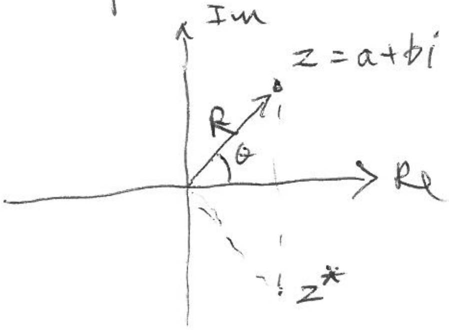
Vi tar særlig det første temaet oversiktsmessig, siden det skal være godt kjent.

2.1 Komplekse tall

Vi danner et sett tall med 1-til-1 korrespondanse med punkter i planet. Dette er lukket under samme operasjonen som de reelle tallene, såfremt den nye, imaginære, aksen har enhet

$$i = \sqrt{-1}$$

Til påminnelse:



$$z = a+bi$$

$$(a+bi) \pm (c+di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$$

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (bc+ad)i$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad \text{(Taylor)}$$

Med polarform:

$$Re^{i\theta} = \underbrace{R\cos\theta}_{a} + i\underbrace{R\sin\theta}_{b}$$

$$R = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}(b/a)$$

$$z_1 z_2 = R_1 R_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

$$z_1/z_2 = R_1/R_2 \, e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

Komplekskonjugering:

$$z^* = a - bi$$

$$z^* z = a^2 + b^2 = |z|^2$$

$$(w+z)^* = w^* + z^*$$

$$(wz)^* = w^* z^*$$

$$(Re^{i\theta})^* = Re^{-i\theta}$$

Et par flere oppgaver:

2.5

$$i^i = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^i = e^{i\frac{\pi}{2}\cdot i} = \underline{e^{-\frac{\pi}{2}}}$$

2.6

Hvorfor dette er galt?

$$\sqrt{\frac{1}{-1}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}$$

ikke OK / OK

$$\sqrt{-1} = \frac{1}{i}$$

$$i = \frac{1}{i}$$

$$i^2 = 1$$

$$\underline{-1 = 1} \quad (!?)$$

HS; la m og n stå for vilkårlige heltall:

$$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{e^{i2\pi m}}{e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi n)}} = e^{i(-\frac{\pi}{2}+2\pi(m-n))}$$

$$= e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi(m-n-\frac{1}{2}))}$$

$$= e^{-i\pi}\, e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi(m-n))}$$

$$= -i \quad \leftarrow$$ (som "foreslått" i boka)

VS; bruk konsistent polarnotasjon og husk at ekstra faktorer $e^{2\pi k i}$ under rottegnet må kansellere mellom teller og nevner:

$$\sqrt{\frac{1}{-1}} = \sqrt{\frac{1}{e^{i\pi}}}$$

$$= e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$= -i \quad \leftarrow$$ (korrigert i forhold til boka)

Altså: Første likhetsuttrykk er korrekt.
Men i lærebokuttrykket man skulle vise var feil, ble ikke VS behandlet videre på en konsistent måte i polarnotasjon. Og man endte der opp med et vanvittig resultat.

2.2 Operatoren

En funksjon får plugget inn et tall og gir ut et nytt tall.

Men:

> En operator er en regel som forandrer en funksjon til en annen funksjon.

DEF

Eksempel, derivasjons operator:

$$D[f(x)] = \frac{df}{dx}$$

$$D[x^2] = 2x$$

$$D[\ln x] = \frac{1}{x}$$

For oss i dette kurset er det størst interesse for om en operator er LINEÆR:

DEF

$$\boxed{\begin{aligned} L[f(x)+g(x)] &= L[f(x)] + L[g(x)] \\ L[c f(x)] &= c L[f(x)] \end{aligned}}$$

Eksempel 2.4

Bestem om disse operatorene er lineære:

a)

$$A[g(x)] = g(x)^2$$

$$A[f(x)+g(x)] = f(x)^2 + g(x)^2 + 2f(x)g(x)$$

$$= A[f(x)] + A[g(x)] + 2f(x)g(x)$$ ikke lineær

b)

$$D[f(x)] = \frac{Df(x)}{dx}$$

$$D[f(x)+g(x)] = \frac{df(x)}{dx} + \frac{dg}{dx} = D[f(x)] + D[g(x)]$$

$$D[cf(x)] = c\frac{df}{dx} = cD[f(x)]$$

$\Big\}$ lineær!

Egenfunksjoner og egenverdier

~~Anta~~ at for en spesiell lineær operator L, finnes det en funksjon hvor

$$\boxed{L[f(x)] = c\,f(x)}$$ (c reell eller kompleks)

Da er $f(x)$ en EGENFUNKSJON for L med EGENVERDI c.

Eksempel 2.5

Egenfunksjoner og egenverdier for $D[f(x)]$

Hvis slike finnes:

$$D[g(x)] = \frac{dg}{dx} = c\,g(x)$$

Generell løsning:

$$g(x) = \underbrace{Ae^{cx}}_{\text{egenfunksjoner}}$$ egenverdi

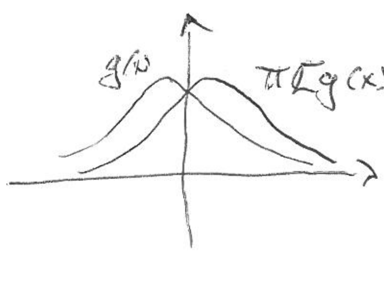
Mens:

$$\left.\begin{aligned} D[\sin x] &= \cos(x) \neq c\sin x \\ D[x^2] &= 2x \neq cx^2 \\ D[\ln x] &= \frac{1}{x} \neq c\ln x \end{aligned}\right\} \text{\underline{ikke} egenfunksjoner}$$

Eksempel 2.6

Egenfunksjoner og egenverdier for endimensjonal paritetsoperator

$$\Pi[g(x)] = g(-x) \qquad \underline{\underline{\text{DEF}}}$$



Operatoren speiler funksjonen gjennom origo.

Prøv å løse

$$\Pi[g(x)] = g(-x) = c\,g(x) \qquad (2.4)$$

som ikke har noen løsning som "faller i øynene".

Ta i stedet tilfellet hvor funksjonen anvendes to ganger:

$$\Pi^2[g(x)] = \Pi[\Pi[g(x)]] \qquad (2.5)$$

Anta at $g(x)$ egenfunksjon med egenverdi c:

$$\Pi^2[g(x)] = \Pi[c\,g(x)] = c\,\Pi[g(x)] = c^2 g(x) \quad (2.6)$$

Fra (2.5) og (2.6): $\quad g(x) = c^2 g(x)$

$$\Rightarrow \quad c = \pm 1$$

$c = +1 \Rightarrow g(-x) = g(x)$ — alle like funksjoner

$c = -1 \Rightarrow g(-x) = -g(x)$ — " odde "

Oppgave 2.8

Identitetsoperatoren $I[f(x)] = f(x)$

Den er lineær:

$$I[f(x) + g(x)] = I[f(x)] + I[g(x)]$$

$$I[c\,f(x)] = c\,I[F(x)]$$

Og den har pr. definisjon egenverdi $c = 1$!

Oppgave 2.12

Operatoren $\quad L[f(x)] = \int_0^x f(s)\,ds$

Den er åpenbart lineær:

$$L[f+g] = \int_0^x (f(s)+g(s))\,ds = \int_0^x f(s)\,ds + \int_0^x g(s)\,ds$$

(osv.)

Men foreleseren finner ikke noen egenfunksjoner.

Derimot, med $\quad L[f(x)] = \int_{-\infty}^x f(s)\,ds$

finner man at $g(x) = Ae^{cx}$

er en egenfunksjon med egenverdi $\frac{1}{c}$!

Bare prøv!