KAPITTEL 4: LØSNINGER AV 1D TIDSUAVHENGIG SL

Likninga

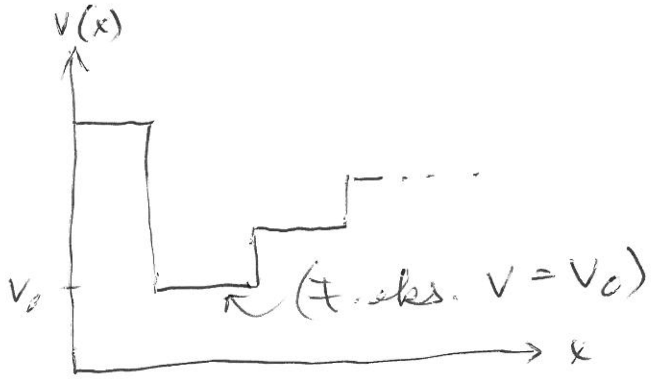
$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi} \qquad (4.1)$$

har anvendelser f.eks. i elektronrør og halvleder-heterostrukturer.

Vi skal se på både bundne og ubundne løsninger, samt om innfallende partikler vil reflekteres fra eller trenge gjennom potensialvegger. Det sistnevnte er tunnelleffekten.

4.1 Ubundne tilstander, spredning og tunnellering

Betrakt her stykkevis konstante potensialer:



Vi kan ha

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V_0\psi = E\psi$$

eller:

$$\boxed{\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}\psi = 0} \qquad (4.2)$$

Hvis

$$\frac{d^2y}{dx^2} + Ay = 0 \qquad (4.3)$$

så

$$y = Ce^{mx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Cm^2e^{mx}$$

$$m^2Ce^{mx} + ACe^{mx} = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \pm\sqrt{-A}$$

Generell løsning:

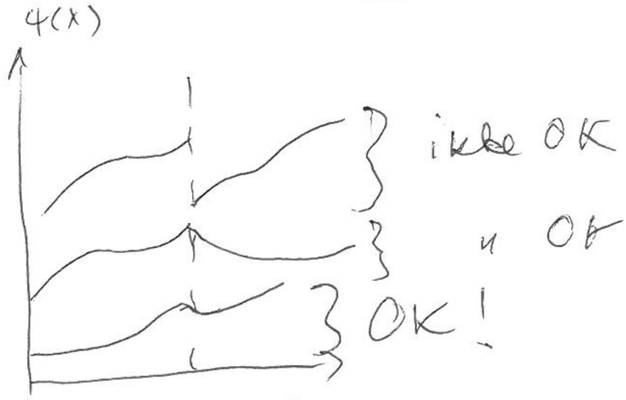
$$\boxed{y = C_1 e^{\sqrt{-A}\,x} + C_2 e^{-\sqrt{-A}\,x}} \qquad (4.4)$$

Hvis $A < 0$, sum av positive og negative eksponensialfunksjoner.

Men hvis $A > 0$:

$$\boxed{\begin{aligned} y &= C_1 e^{i\sqrt{A}\,x} + C_2 e^{-i\sqrt{A}\,x} && (4.5)\\ &= D_1\cos(\sqrt{A}\,x) + D_2\sin(\sqrt{A}\,x) && (4.6)\end{aligned}}$$

Hvis stykkevis konstante potensialer:
Både ψ og $\frac{d\psi}{dx}$ må være kontinuerlige



Merk at den generelle løsningen i $V=0$ – tilfellet er en sum av bølger i motsatte retninger!

$$\psi = C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx}$$
$$= C_1 e^{i(\sqrt{2mE}/\hbar)x} + C_1 e^{-i(\sqrt{2mE}/\hbar)x} \qquad \left(A = \frac{2mE}{\hbar^2}\right)$$

$$\Psi(x,t) = \psi(x)\, e^{-iEt/\hbar} \qquad (E = \hbar\omega)$$
$$= \underbrace{C_1 e^{i(kx-\omega t)}}_{\text{høyre-løpende}} + \underbrace{C_2 e^{i(-kx-\omega t)}}_{\text{venstre-løpende}}$$

$\boxed{\text{Se ligning (3.30)}}$

De to bidragene er hver for seg impulsegenfunksjoner, men summen ($C_1 \neq 0 \wedge C_2 \neq 0$) er ikke det!
(Se oppgave 4.2)

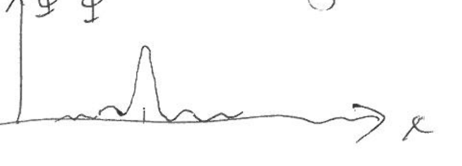
Hva med posisjonen?
Betrakt høyreløpende:

$$\Psi(x,t) = C_1 e^{i(kx-\omega t)}$$

$$\Psi^*\Psi = C_1^* C_1 \qquad \text{posisjonsuavhengig!}$$

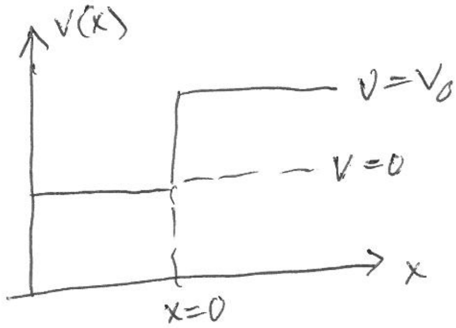
Samme sjanse til å finne partikkelen overalt i rommet!!

I praksis, en partikkel vil bli representert ved en sum av alle bølger mellom $k=0$ og $k=k_0$ (Fourier) og man får en bølgepakett.



Spredning fra trinn-potensial

Betrakt dette : (Partikkel inn fra venstre)



Idealiser:
La ψ'ene være egenfunksjoner for impuls.

Klassisk: (E innkommende energi)

$E > V_0 \Rightarrow$

$$p_1 = \sqrt{2mE}$$
$$p_2 = \sqrt{2m(E-V_0)}$$

Kvantemekaniske bølgetall:

$$k_1 = \frac{p_1}{\hbar} = \sqrt{2mE}/\hbar$$
$$k_2 = \frac{p_2}{\hbar} = \sqrt{2m(E-V_0)}/\hbar$$

Tilfellet $E > V_0$

Her har vi

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0 \quad (x<0) \quad \Rightarrow \quad \psi_1(x) = A_1 e^{ik_1x} + B_1 e^{-ik_1x} \qquad (4.10/4.12)$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}\psi = 0 \quad (x \geq 0) \quad \Rightarrow \quad \psi_2(x) = A_2 e^{ik_2x} + B_2 e^{-ik_2x} \qquad (4.11/4.13)$$

~~For~~ å få full bølgefunksjon:
Mult med $e^{-iEt/\hbar}$ (som vi har sett)

Må ha $\underline{B_2 = 0}$

siden ingen venstreløpende bølge til høyre for spranget!

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) \Rightarrow \qquad A_1 + B_1 = A_2 \qquad (4.17)$$

$$\frac{d\psi_1(0)}{dx} = \frac{d\psi_2(0)}{dx} \Rightarrow \qquad ik_1A_1 - ik_1B_1 = ik_2A_2 \qquad (4.18)$$

To ligninger, tre ukjente:

$$A_1 = \frac{1}{2}A_2\left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right) \qquad (4.19)$$

$$B_1 = \frac{1}{2}A_2\left(1 - \frac{k_2}{k_1}\right) \qquad (4.20)$$

Og full løsning:

$$\boxed{\begin{aligned}\psi_1(x) &= \tfrac{1}{2}A_2\left(1+\frac{k_2}{k_1}\right)e^{ik_1x} + \tfrac{1}{2}A_2\left(1-\frac{k_2}{k_1}\right)e^{-ik_1x}, \quad x<0 \\ \psi_2(x) &= A_2 e^{ik_2x}\end{aligned}}$$

Refleksjons- og transmisjons~~koeffisienter~~ sannsynligheter:

$$R = \frac{(\text{refl. amp})^2}{(\text{innk. amp})^2} = \frac{B_1^* B_1}{A_1^* A_1}$$

$$T = \frac{(\text{transm. amp})^2}{(\text{innk. amp})^2} = \frac{A_2^* A_2}{A_1^* A_1}$$

Det gir

$$\boxed{R = \frac{(k_1-k_2)^2}{(k_1+k_2)^2}} \qquad (4.22)$$

$$\boxed{T = 1-R = 1-\frac{(k_1-k_2)^2}{(k_1+k_2)^2}}$$

Eller:

$$R = \left(\frac{\sqrt{E}-\sqrt{E-V_0}}{\sqrt{E}-\sqrt{E-V_0}}\right)^2$$

Brudd med klassisk fysikk!

En ikke-forsvinnende sannsynlighet for at partikkelen ikke passerer (trinnet), men blir spredd bakover!

Hvis $E = 2V_0$ så $\underline{R = 0.17}$; hvorfor blir ikke slikt observert klassisk?

– Slike sprang finner sted over en endelig lengde; så lenge de Broglie-bølgelengden er mye mindre, er vi i det klassiske området, der beregningen foran er ugyldig.

Eksempel 4.1

Når er trinnfunksjonspotensialet i ~~det klassiske~~ kvante-regimet?

Anta elektron, akselerert over 100 V:

$$E = e\phi$$
$$= 1.6\times10^{-19} \times 10 \ \mathrm{C \times V}$$
$$= 1.6\times10^{-17}\ \mathrm{J}$$

$$\lambda = h/p = h/\sqrt{2mE}$$
$$= \frac{6.6\times10^{-34}}{\sqrt{2\times9.9\times10^{-31}\times1.6\times10^{-17}}}\ \mathrm{m} \approx \underline{1.2\times10^{-10}\ \mathrm{m}}$$

(omtrent en atomradius)

Trinnbredden må være mye ~~større~~ enn ~~dette~~ for at man skal være helt og holdent i det klassiske regimet.

I praksis: Kvanteeffekter i trinnpotensialer ser man bare på atom- og kjernenivå.

Tilfellet $E < V_0$

Omtrent identiske regnetrinn, som vi tar summarisk: vi setter

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad \text{(som før)}$$
$$k_2 = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar} \quad \text{(annen rekkefølge)}$$

Løsningen for $x \geq 0$ blir forskjellig:

$$\psi_1(x) = A_1 e^{ik_1x} + B_1 e^{-ik_1x} \quad (x<0)$$
$$\psi_2(x) = A_2 e^{k_2x} + B_2 e^{-k_2x} \quad (x\geq0)$$

(ombyttet rekkefølge)

Må ha

$$\underline{A_2 = 0}$$

så ikke løsninga "eksploderer" for $x\to\infty$.

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) \Rightarrow \quad A_1 + B_1 = B_2$$

$$\frac{d\psi_1(0)}{dx} = \frac{d\psi_2(0)}{dx} \Rightarrow \quad ik_1A_1 - ik_1B_1 = -k_2B_2$$

Løs og få:

$$A_1 = \tfrac{1}{2} B_2 \left(1 + i \frac{k_2}{k_1}\right)$$
$$B_1 = \tfrac{1}{2} B_2 \left(1 - i \frac{k_2}{k_1}\right)$$

Full løsning altså

$$\boxed{\begin{aligned} \psi_1(x) &= \tfrac{1}{2} B_2\left(1+i\frac{k_2}{k_1}\right)e^{ik_1x} + \tfrac{1}{2}B_2\left(1-i\frac{k_2}{k_1}\right)e^{-ik_1x}, \quad x<0 \\ \psi_2(x) &= B_2 e^{-k_2 x}, \quad x \geq 0 \end{aligned}}$$

Refleksjonssannsynlighet:

$$R = \frac{B_1^* B_1}{A_1^* A_1} = \frac{\left(\tfrac{1}{2}B_2\right)^2 \left(1+i\frac{k_2}{k_1}\right)\left(1-i\frac{k_2}{k_1}\right)}{\left(\tfrac{1}{2}B_2\right)^2 \left(1-i\frac{k_2}{k_1}\right)\left(1+i\frac{k_2}{k_1}\right)}$$

$$= 1$$

$$T = 1 - R = 0$$

Alltid refleksjon – resultat i overensstemmelse med det klassiske.

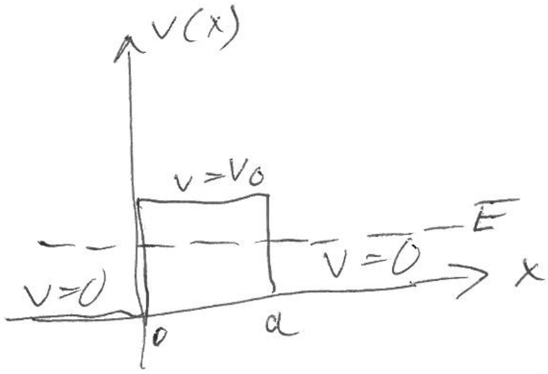
Men $\psi_2 \neq 0$ for $x > 0$; sannsynligheten for å finne partikkelen i det klassisk forbudte området er til stede!

Dette kan ha viktige konsekvenser på atom- og ~~Bfer~~ atomkjernskala.
I grensen av "∞" høy barriere ($V_0 \gg E$) går $k_2 \to \infty$, og $\psi_2(x) \to 0$ for gitt $x > 0$.

Tunneleffekten

Hva hvis steppen har en endelig bredde? ~~og~~

Forvent oscillerende oppførsel for $x<0$ og $x>a$, men eksponensiell inni.



Som før ($V_0 > E$):

$$\psi_1(x) = A_1 e^{ik_1x} + B_1 e^{-ik_1x} \qquad (x<0)$$

$$\psi_2(x) = A_2 e^{k_2x} + B_2 e^{-k_2x} \qquad (0 \le x < a)$$

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$k_2 = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$$

mens

$$\psi_3(x) = B_3 e^{ik_1x} \qquad (x \ge a)$$

Nå, 2 par grensebetingelser:

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) \qquad (4.23)$$

$$\frac{d\psi_1(0)}{dx} = \frac{d\psi_2(0)}{dx} \qquad (4.24)$$

$$\psi_2(a) = \psi_3(a) \qquad (4.25)$$

$$\frac{d\psi_2(a)}{dx} = \frac{d\psi_3(a)}{dx} \qquad (4.26)$$

Det gir først

$$A_1 + B_1 = A_2 + B_2$$

$$ik_1A_1 - ik_1B_1 = k_2A_2 - k_2B_2$$

$$A_2e^{k_2a} + B_2e^{-k_2a} = B_3e^{ik_1a}$$

$$k_2A_2e^{k_2a} - k_2B_2e^{-k_2a} = ik_1B_3e^{ik_1a}$$

4 likninger med 5 ukjente.

Transmisjonssannsynligheten:

$$T = \frac{B_3^* B_3}{A_1^* A_1}$$

Læreboka beregner det for oss:

$$\boxed{T = \frac{1}{1+\left(\frac{V_0^2}{4E(V_0-E)}\right)\sinh^2(k_2 a)}} \qquad (4.27)$$

En partikkel kan "tunnellere" gjennom barrieren også for $\underline{E<V_0}$ og komme ut på den andre sida!

Klassisk regime: $\quad k_2 a \gg$ og $T \to 0$.

Eksempel 4.2

Baseball mot vegg, $m = 0.14$ kg, $v = 1.0$ m/s, $a = 0.2$ m:

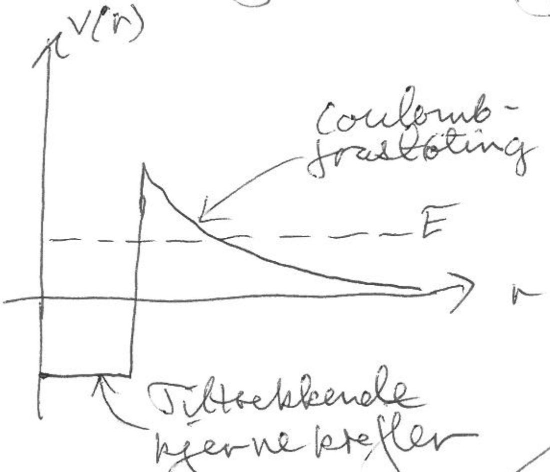
$$\begin{aligned}
k_2 &= \frac{p}{\hbar} \\
&= \frac{0.14 \times 1.0}{1.05 \times 10^{-34}}\ \text{m}^{-1} \\
&= 1.3 \times 10^{33}\ \text{m}^{-1}
\end{aligned}$$

$$k_2 a = 2.6 \times 10^{32}$$

$$\begin{aligned}
\sin^2(k_2 a) &\approx e^{2k_2 a} \\
&\approx e^{5.2\times 10^{32}} \\
&\approx 10^{(10^{32})}
\end{aligned}$$

$$\boxed{T \approx 10^{-10^{32}}} \quad (> 0!)$$

Tunnelleffekter ser man ~~på~~ atomkjerneskala, f. eks. for α-henfall av U^{238}



$\tau(U^{238}) = 6.5 \times 10^9$ år

(halve universets alder)

Annen anvendelse: Tunnelldioder

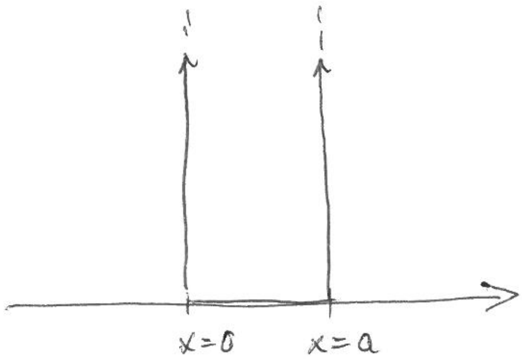
4.3 Bundne systemer

To eksempler i 1D:

- Uendelig dyp firkantbrønn ("partikkel i boks") – enklest
- Harmonisk oscillator

Forberedelse for 3D systemer i kapittel 6!

Partikkel i boks



$$V(x) = 0, \quad 0 \le x \le a$$
$$V(x) = \infty, \quad x < 0 \text{ eller } x > a$$

God approksimasjon for alle systemer med potensialbarrierer ~~hvor~~

$$V \gg E$$

Tidsuavhengig SL:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0 \qquad (4.28)$$

Trigonometrisk form mer hensiktsmessig enn kompleks eksponensialfunksjon:

$$\psi(x) = c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x\right)$$

Venstre grensebetingelse:

$$\psi(0) = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = c_1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \psi(x) = c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x\right) \qquad (4.29)$$

Høyre grensebetingelse:

$$\psi(a) = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}a = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (4.31)$$

$$\boxed{E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}n^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots} \qquad (4.32)$$

$n = 1$, laveste energi:

$$E_1 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2} \quad \text{nullpunktsenergi} \qquad (4.33)$$

Innsetting og normalisering av bølgefunksjon:

$$\psi_n = C_2 \sin\frac{n\pi x}{a}$$

$$\int_0^a \psi_n^*(x)\psi_n(x) = |C_2|^2 \int_0^a \sin^2\frac{n\pi x}{a}\,dx \qquad \left(\frac{n\pi x}{a} = y,\ dx = \frac{a}{n\pi}dy\right)$$

$$= |C_2|^2 \frac{a}{n\pi}\int_0^{n\pi} \sin^2 y\,dy$$

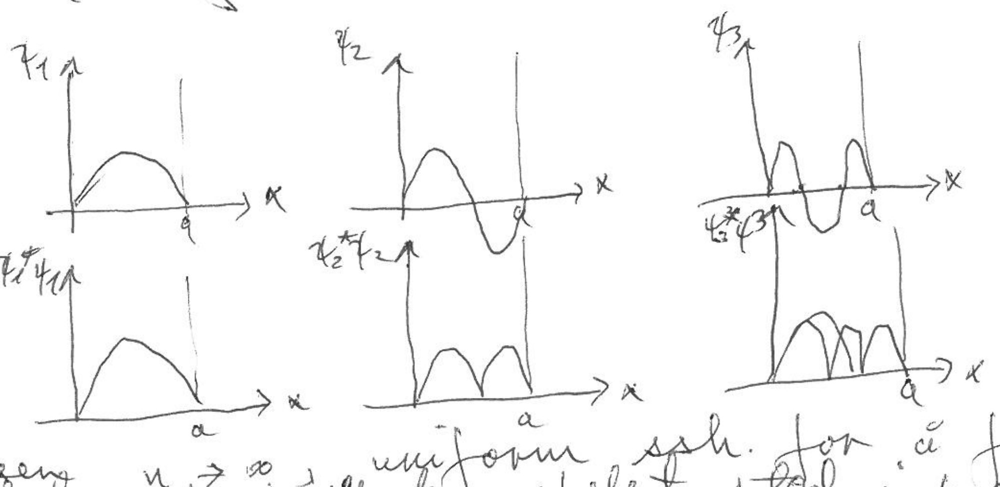
$$= |C_2|^2 \frac{a}{\pi}\underbrace{\int_0^{\pi} \sin^2 y\,dy}_{=\frac{\pi}{2}}$$ (se tidligere resultat)

$$= 1$$

Velg C_2 reell og positiv:

$$\boxed{\begin{array}{l} \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad a \le x \le 0 \\ \psi_n = 0, \quad x < 0 \text{ eller } x > a \\ E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}n^2 \\ n = 1, 2, 3, \ldots \end{array}}$$

ψ_n er $\left\{\begin{array}{l}\text{symmetrisk} \\ \text{antisymmetrisk}\end{array}\right\}$ for $\left\{\begin{array}{l}\text{like} \\ \text{odde}\end{array}\right\}$ n-verdier



I grensen $n \to \infty$, uniform ssh. for å finne partikkelen et hvilketsomhelst sted i brønnen.

Hvis $V < \infty$ (dvs. regninga approksimativ): et ~~endelig~~ # bundne tilstander, max-verdi for n. (Analogi til stående bølger i orgelpipe)

Realisering:
Tynt halvlederlag mellom to tykkere lag av annen halvleder.
Hvis i 3D: Quantum dot ("kvantedott"?)

Harmonisk oscillator-potensial

Liksom funnet i oppgave 3.1:

$$\boxed{V(x) = \frac{1}{2}Kx^2} \qquad (4.34)$$

Tilsvarende i klassisk mekanikk, masse fast gjort til fjær:

$$F(x) = -Kx$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -K(x)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= A\cos(\omega t) \\ v &= -A\omega\sin(\omega t) \end{aligned}\right\} \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Kx^2 \\ &= \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t) + \frac{1}{2}KA^2\cos^2(\omega t) \\ &= \frac{1}{2}KA^2 \end{aligned} \qquad (4.35)$$

Hvorfor et potensial av kvantemekanisk interesse?
For vilkårlig potensial, minimum flyttet til $x=0$:

$$V(x) = \underbrace{V(0)}_{\text{konstant bidrag}} + \underbrace{V'(0)}_{=0 \text{ i minimum}}x + \underbrace{\frac{1}{2}V''(0)x^2}_{\text{laveste ikketrivielle bidrag}} + \frac{1}{6}V'''x^3 + \ldots$$

For små x, viktigste bidrag er

$$V(x) = \frac{1}{2}V''(x)$$

- brukes ofte for å approksimere ionebevegelser i krystallgitter

Vi skal nå løse tidsuavhengig SL, som vi først skalerer:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}Kx^2\psi = E\psi \qquad (4.36)$$

$$s = \frac{(Km)^{1/4}}{\hbar^{1/2}}x \qquad \text{(sml. oppgave 3.1)}$$

$$\lambda = \frac{2}{\hbar}\sqrt{\frac{m}{K}}E \qquad (4.37)$$

$$\boxed{\frac{d^2\psi}{dx^2} + (\lambda - s^2)\psi = 0} \qquad (4.38)$$

De dimensjonsløse s og λ har ingen fysisk betydning ut over å forenkle problemet.

Se først på grensetilfellet $s^2 \gg \lambda$:

~~Dvs~~

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - s^2\psi = 0 \qquad (4.39)$$

Prøv tilnærmet løsning, gyldig for store s :

$$\psi = Ae^{s^2/2} + Be^{-s^2/2}$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = A(1+s^2)e^{s^2/2} - B(1-s^2)e^{-s^2/2}$$

$$\approx As^2e^{s^2/2} + Bs^2e^{-s^2/2} \quad (\text{for } s \gg 1)$$

Må ha $\underline{\underline{A=0}}$, ellers er løsningen ikke normaliserbar!

Prøv derfor å se på løsning av formen

$$\psi(s) = f(s)e^{-s^2/2} \qquad (4.41)$$

$$\frac{d\psi}{ds} = f'(s)e^{-s^2/2} - f(s)\,s\,e^{-s^2/2}$$

$$\frac{d^2\psi}{ds^2} = \{f''(s) - 2f's\,e^{-s^2/2} + f(s)s^2\}e^{-s^2/2}$$

$$(-f(s)e^{-s^2/2})$$

Innsatt og forkortet:

$$\boxed{\frac{d^2f}{ds^2} - 2s\frac{df}{ds} + (\lambda-1)f = 0} \qquad (4.42)$$

Utvikling i potensrekke prøves:

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n \qquad (4.43)$$

$$f'(s) = n\sum_{n=1}^{\infty} a_n s^{n-1}$$

(OPPS) (OPPS)

$$f''(s) = n(n-1)\sum_{n=2}^{\infty} a_n s^{n-2}$$

$$= (m+2)(m+1)\sum_{m=0}^{\infty} a_{m+2}s^m$$

(OPPS)

$m = n-2$; kan etterpå døpe om $m \to n$ siden summevariabel!

(OPPS)

Innsatt:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}s^n + (\lambda - 2n - 1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n = 0$$

Dette må stemme potens for potens i s.
Det gir følgende rekursjonsrelasjon:

$$a_{n+2} = \frac{2n+1-\lambda}{(n+2)(n+1)}a_n \qquad (4.44)$$

Hvis a_0 og a_1 er kjent, kan alle de andre finnes!

Så kommer en matematisk lærdom:

Hvis $f(s)$ er et endelig polynom, så vil eksponensialfaktoren $e^{-s^2/2}$ dominere over $f(s)$ for store s; mens et uendelig polynom vil dominere for store s.

Summen i $f(s)$ må derfor ha et endelig # ledd.
λ må være et heltall! KVANTISERING!

Å fastlegge λ tilsvarer å fastlegge E_n.

Betraktet

$$\lambda = 2n+1 \tag{4.45}$$

Det gir n-verdien hvor $a_{n+2}=0$. Hvis n er et like tall, så er det ingen relasjon som kan fastlegge $a_{n+3}=0$. osv. Og tilsvarende for odde n.

Altså:

Den endelige summen i $f(s)$ må inkludere enten bare ~~ulike like~~ like eller bare ulike potenser av s, der høyeste potens som gir $a_{2n+1} \neq 0$ bestemmes av λ!

Det gir løsningene (Hermite-polynomer):

$$\boxed{\begin{aligned} n=0, \quad \psi_0(s) &= C_0 e^{-s^2/2} && (4.46)\\ n=1, \quad \psi_1(s) &= C_1(2s)e^{-s^2/2} && (4.47)\\ n=2, \quad \psi_2(s) &= C_2(4s^2-2)e^{-s^2/2} && (4.48)\\ &\vdots \end{aligned}}$$

med tilsvarende normalisering:

$$\boxed{C_n = \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{2^n n!}}}$$

(4.37) og (4.45) gir energinivåene:

$$2n+1 = \lambda = \frac{2}{\hbar}\sqrt{\frac{m}{K}}\,E$$

Med $\omega = \sqrt{K/m}$ (klassisk harmonisk oscillator):

$$\boxed{E_n = \left(n+\tfrac{1}{2}\right)\hbar\omega} \quad (n=0,1,2,\ldots) \tag{4.51}$$

Merk:

I uttrykkene for $\psi_n(s)$ er det en konvensjon at ψ_n's høyeste potens er $\propto 2^n$.
Det avspeiler seg i uttrykkene for C_n.

Harmonisk oscillator har en nullpunktsenergi:

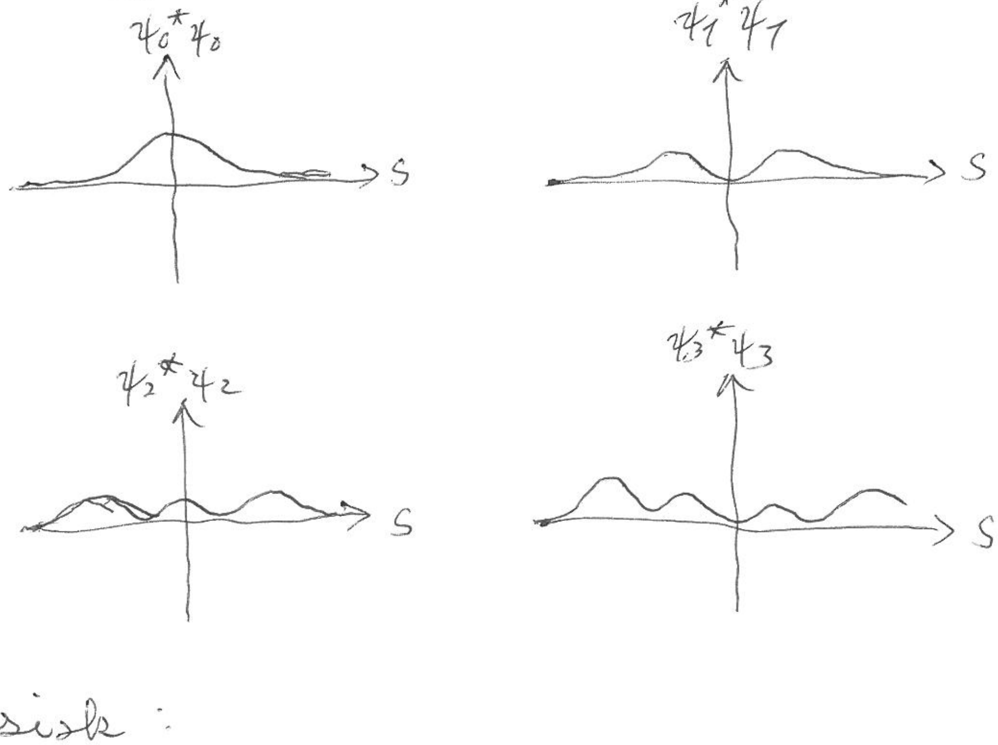
$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$$

Sml. klassisk harmonisk oscillator:

Polynomene i ψ_n for harmonisk oscillator kalles Hermite-polynomer.

$\psi_n \neq 0$ også i det klassisk forbudte området $V > E$.

Ssh-skisser:



Klassisk:

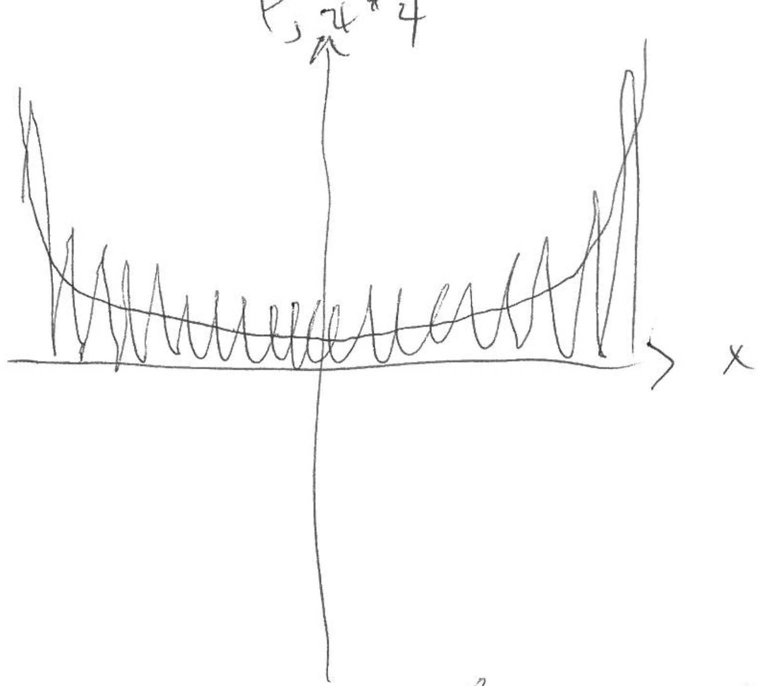
$$-\sqrt{\frac{2E}{K}} < x < \sqrt{\frac{2E}{K}}$$

(størst hastighet midt i)

$$v = \sqrt{(2E - Kx^2)/m}$$

Dvs. siden $dt = \frac{dx}{v}$: $\quad P \propto \sqrt{\frac{m}{2E - Kx^2}}\, dx$

Sml. QM ssh. for $n = 50$:



I grensen $n \to \infty$ vil QM ssh. nærme seg til det klassiske resultatet.

Eksempel på korrespondanseprinsippet.

Anvendelse av QM HO:

F. eks. vibrasjoner i diatomiske molekyler, som blir godt beskrevet

samt skallmodellen for atomkjerner, og tilsvarende for kvarkemodell for baryoner og mesoner.