Løsninger til kapittel 15

15.1

Generell relasjon:

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

Ikke-relativistisk grense ($p \ll mc$):

$$E = mc^2\sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2c^2}} \qquad \left(\text{Bruk nå } \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \ldots\right)$$

$$= mc^2\left(1 + \frac{p^2}{2m^2c^2}\left(1 - \frac{p^2}{4m^2c^2} + \ldots\right)\right)$$

$$= mc^2 + \frac{p^2}{2m}\left(1 - \frac{p^2}{4m^2c^2} + \ldots\right)$$

$$= \underline{\frac{p^2}{2m} + mc^2 + \mathcal{O}\left(\frac{p^4}{8m^3c^2}\right)}$$

som skulle vises

15.2

Ved multiplikasjon med $(-\hbar^2c^2)$ går den oppgitte likningen over til

$$\left(i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 = (-i\hbar c\nabla\phi)^2 + m^2c^4\phi^2$$

Hvis ϕ egenfunksjon, tilsvarer det

$$E^2\phi^2 = p^2c^2\phi^2 + m^2c^4\phi^2$$

Men dette er en ikkelineær likning i ϕ, som er vanskelig å hanskes med analytisk!

15.3

a) Ta tipset fra løsningsforslaget, og innfør impulsoperator:

$$\int \vec{J}\, d^3r = \frac{\hbar}{2m}\left(i\int\psi\nabla\psi^* d^3r - i\int\psi^*\nabla\psi\, d^3r\right)$$

$$= \frac{i\hbar}{2m}\left(\int(\nabla\psi)^+\psi\, d^3r - \int\psi^*\nabla\psi\, d^3r\right)$$

$$= \frac{i\hbar}{2m}\left(-\int\psi^*\nabla\psi\, d^3r - \int\psi^*\nabla\psi\, d^3r\right) \qquad (\text{husk } \nabla^+ = -\nabla)$$

$$= \frac{1}{m}\int\psi^*(-i\hbar\nabla)\psi\, d^3r$$

$$= \frac{1}{m}\langle\vec{p}\rangle$$

$$= \underline{\underline{\langle\vec{v}\rangle}}$$

som skulle vises!

b)
Benevning for $\vec{j}$?

$\dim \vec{v} = L/T$

$\dim \vec{j} \times L^3 = L/T$; $\dim \vec{j} = L^{-2}/T$

Benevningen for $\vec{j}$ altså $\underline{\underline{m^{-2}s^{-1}}}$.

15.4

Bruk $\vec{j} = \frac{i\hbar}{2m}(\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi)$ med KG-likningen i stedet for Schrödingerlikningen ($\psi \to \phi$), og finn det oppgitte uttrykket for ρ for Klein-Gordon-likningen.

$\vec{j}$'s divergens:

$$\nabla\cdot\vec{j} = \frac{i\hbar}{2m}(\phi\nabla^2\phi^* - \phi^*\nabla^2\phi)$$

KG-likningen omskrevet, samt dens komplekskonjugerte:

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi$$

$$\nabla^2\phi^* = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi^*}{\partial t^2} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi^*$$

Innsatt i kontinuitetslikningen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\rho}{\partial t} &= -\nabla\cdot\vec{j}\\ &= -\frac{i\hbar}{2mc^2}\left\{\phi\frac{\partial^2\phi^*}{\partial t^2} \boxed{\cancel{-\frac{m^2c^4}{\hbar^2}\phi\phi^*}} - \phi^*\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \boxed{\cancel{+\frac{m^2c^4}{\hbar^2}\phi^*\phi}}\right\}\\ &= -\frac{i\hbar}{2mc^2}\left\{\phi\frac{\partial^2\phi^*}{\partial t^2} - \phi^*\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right\}\end{aligned}$$

Delvis integrasjon i tid t gir

$$\int\phi\frac{\partial^2\phi^*}{\partial t^2}dt = \phi\frac{\partial\phi^*}{\partial t} - \int\frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial\phi^*}{\partial t}dt$$

$$\int\phi^*\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}dt = \phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t} - \int\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\frac{\partial\phi}{\partial t}dt$$

Når vi setter inn i uttrykket for $\rho = \int\frac{\partial\rho}{\partial t}dt$, vil to ledd kansellere hverandre, og vi står tilbake med

$$\boxed{\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t} - \phi\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\right)}$$

som skulle vises.

15.5

Med konvensjonene i denne læreboka:

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Eksplisitt:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0&0&0&1 \\ 0&0&1&0 \\ 0&1&0&0 \\ 1&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&-i \\ 0&0&i&0 \\ 0&-i&0&0 \\ i&0&0&0 \end{pmatrix}$$

15.6

Med

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -i\hbar c(\vec{\alpha}\cdot\nabla)\psi + \beta mc^2\psi, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

finner vi:

$$i\hbar\frac{\partial\psi_1}{\partial t} = -i\hbar c\left(\frac{\partial\psi_4}{\partial x} - i\frac{\partial\psi_4}{\partial y} + \frac{\partial\psi_3}{\partial z}\right) + mc^2\psi_1$$

$$i\hbar\frac{\partial\psi_2}{\partial t} = -i\hbar c\left(\frac{\partial\psi_3}{\partial x} + i\frac{\partial\psi_3}{\partial y} - \frac{\partial\psi_4}{\partial z}\right) + mc^2\psi_2$$

$$i\hbar\frac{\partial\psi_3}{\partial t} = -i\hbar c\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x} - i\frac{\partial\psi_2}{\partial y} + \frac{\partial\psi_1}{\partial z}\right) - mc^2\psi_3$$

$$i\hbar\frac{\partial\psi_4}{\partial t} = -i\hbar c\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + i\frac{\partial\psi_1}{\partial y} - \frac{\partial\psi_2}{\partial z}\right) - mc^2\psi_4$$

15.7

Fra likningene (15.21) og (15.22) for et elektron i ro, har vi (positiv energi)

$$|\uparrow\rangle \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imc^2t/\hbar}, \quad |\downarrow\rangle \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imc^2t/\hbar}$$

Siden $|\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\right)$

blir da

$$\boxed{\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-mc^2t/\hbar}}$$

spinoren for en spinn-$\frac{1}{2}$ partikkel i ro med spinn i $(+x)$-retning og positiv energi.

15.8

Med notasjonen
$$\psi = \begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \chi_1\\ \chi_2\end{pmatrix} e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)/\hbar}$$
($\phi_1, \phi_2, \chi_1, \chi_2$ $\vec{r}$- & t-uavh.)

kan vi også skrive
$$\phi = \begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix}, \quad \chi = \begin{pmatrix}\chi_1\\ \chi_2\end{pmatrix}$$

Dirac-likning:
$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix} = -i\hbar c\begin{pmatrix}0 & \vec{\sigma}\\ \vec{\sigma} & 0\end{pmatrix}\cdot\nabla\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix}mc^2\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix}$$

~~Første~~ ledd på høyre side "bytter" ϕ og χ, i forhold til venstre side. Det skyldes $\vec{\alpha}$-representasjonen som er valgt.

a)
Ved eksplisitt sjekk av multiplikasjonene som i oppgave 15.6, finner vi at 2x2-representasjonen kan brukes videre i notasjonen, og gir
$$i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t} = -i\hbar c(\vec{\sigma}\cdot\nabla)\chi + mc^2\phi$$
$$i\hbar\frac{\partial\chi}{\partial t} = -i\hbar c(\vec{\sigma}\cdot\nabla)\phi - mc^2\chi$$

Med utprojisering av operatorenes egenverdier (direkte derivasjon i uttrykket øverst på arket):
$$E\phi = c(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\chi + mc^2\phi$$
$$E\chi = c(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\phi - mc^2\chi$$

Eller omordnet som i læreboka:
$$\boxed{\begin{aligned}(E-mc^2)\phi &= c(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})\chi\\ (E+mc^2)\chi &= c(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})\phi\end{aligned}}$$
som skulle vises.

b)
Nederste likning gir:
$$\chi = \frac{c(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})}{E+mc^2}\phi$$

Og innsatt i spinoren:
$$\boxed{\psi = \begin{pmatrix}\phi\\ c(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})\phi/(E+mc^2)\end{pmatrix} e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)/\hbar}}$$
som skulle vises