Løsninger til kapittel 4

4.2

1D impulsoperator: $-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$

Oppgitt bølgefunksjon:

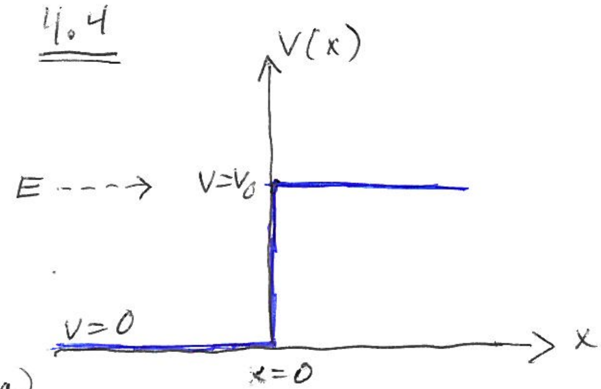
$$\Psi(x,t) = C_1 e^{i(kx-\omega t)} + C_2 e^{i(-kx-\omega t)}$$

Sett inn:

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\Psi = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\left(C_1 e^{i(kx-\omega t)} + C_2 e^{i(-kx-\omega t)}\right)$$
$$= \hbar k C_1 e^{i(kx-\omega t)} - \hbar k C_2 e^{i(-kx-\omega t)}$$
$$= p C_1 e^{i(kx-\omega t)} + (-p) C_2 e^{i(-kx-\omega t)}$$
$$\neq p\Psi$$

Hvis derimot enten $C_1 = 0$ eller $C_2 = 0$, får vi at Ψ er en egenfunksjon for impuls.

4.4



Partikkel inn fra venstre mot potensialsprang med høyde akkurat lik energien:

$$E = V_0$$

a) Tidsuavhengig SL til venstre for spranget:

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi_1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \psi_1 = C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx}, \qquad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

Se læreboka s. 65

Til høyre for spranget:

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + \underbrace{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}}_{=0}\psi_2 = 0$$

$$\frac{d\psi_2}{dx} = B$$

$$\psi_2 = A + Bx$$

Grensebetingelser for bølgefunksjon og dens derivate:

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) \Rightarrow \qquad C_1 + C_2 = A$$

$$\frac{d\psi_1(0)}{dx} = \frac{d\psi_2(0)}{dx} \Rightarrow \qquad ikC_1 - ikC_2 = B$$

Men for ikke å miste all normaliserbarhet til høyre for spranget må vi velge $\underline{B = 0}$. Det gir

$$C_1 = C_2 = \tfrac{1}{2}A$$

og

$$\boxed{\begin{aligned} \psi_1(x) &= \tfrac{1}{2}A\left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right) \\ \psi_2(x) &= A \\ k &= \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \end{aligned}}$$

b) Refleksjonskoeffisienten blir forholdet mellom absolutt kvadratene for venstreløpende og høyreløpende bølge:

$$R = \frac{C_2^* C_2}{C_1^* C_1} = \frac{(A/2)^2}{(A/2)^2} = \underline{\underline{1}}$$

4.6

Etter akselerasjonen har elektronet en kinetisk energi på 3 eV. Barrierehøyde 5 eV, tykkelse 5×10^{-10} m.
I barrieren:

$$k_2 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

$$= \frac{\sqrt{2 \times 9.11 \times 10^{-31} \times 2 \times 1.60 \times 10^{-19}}}{1.055 \times 10^{-34}} \text{ m}^{-1}$$

$$= 7.24 \times 10^9 \text{ m}^{-1}$$

$m_e = 9.11 \times 10^{-31}$ kg
$\hbar = 1.055 \times 10^{-34}$ Js
$= 6.58 \times 10^{-16}$ eV s
$1 \text{ eV} = 1.60 \times 10^{-19}$ J

$$\frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} = \frac{5^2}{4 \times 3 \times 2} = 1.042$$

$$k_2 a = 7.24 \times 10^9 \times 5 \times 10^{-10} = 3.62$$

$$\sinh(k_2 a) = 18.63$$

Transmisjonssannsynligheten (se læreboken side 78):

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \times \sinh^2(k_2 a)} = \frac{1}{1 + 1.042 \times (18.63)^2} = \underline{\underline{2.76 \times 10^{-3}}}$$

4.8

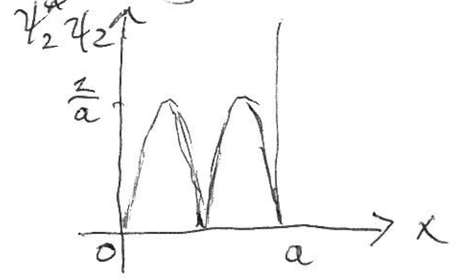
Nullpunktsenergien til baseballen, $m = 0.14\,\mathrm{kg}$, som er innesperra mellom to tjukke vegger i avstand $a = 0.5\,\mathrm{m}$:

$$E_1 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2} = \frac{(1.055\times10^{-34})^2\times\pi^2}{2\times0.14\times(0.5)^2}\ \mathrm{J} = \underline{\underline{1.56\times10^{-66}\ \mathrm{J}}}$$

(Skulle den istedet hatt en energi som tilsvarer $v = 10\,\mathrm{m/s}$, måtte den hatt kvantetallet $n \approx 2.1\times10^{33}$!)

4.9

Situasjon (se s. 83):



a)

Det er -selvsagt- størst sjanse for å finne partikkelen ved $x = \frac{1}{4}a$ og $x = \frac{3}{4}a$.
Og minst sjanse ved $x = \frac{1}{2}a$, samt når $x = 0$ og $x = a$.

b)

Middlere impuls:

$$\langle p^2\rangle = \int_0^a \psi_2^*(x)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\psi_2(x)\,dx$$

$$= (-1)^2\left(\sqrt{\frac{2}{a}}\right)^2\hbar^2\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2\int_0^a \sin^2\left(\frac{2\pi x}{a}\right)dx$$

La $\frac{2\pi x}{a} = y$

$$= \frac{4\hbar^2\pi^2}{a^2}\,\frac{1}{\pi}\underbrace{\int_0^a \sin^2(y)\,dy}_{2\times\frac{\pi}{2}}$$

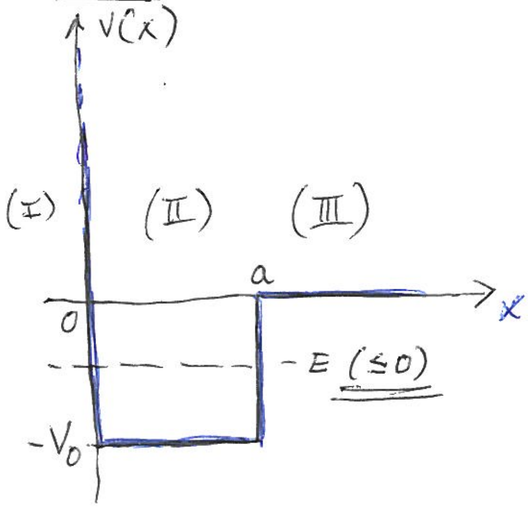
$$= \frac{4\hbar^2\pi^2}{a^2}$$

$$= 2m\times\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}\times2^2$$

$$= \underline{\underline{2mE_2}}$$

Ikke helt uventa !

4.11



$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ -V_0\,(<0) & 0 \le x \le a \\ 0 & x > a \end{cases}$$

Dette er en variant av problemet med potensialbrønn av endelig dybde, som er standard i mange lærebøker.

Som vanlig, finn generelle løsninger i de tre områdene (I), (II) og (III), og skjøt dem sammen.

Område (I):

$$\psi_1(x) = 0$$

Område (II):

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi_2 + V\psi_2 = E\psi_2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} - \frac{2m}{\hbar^2}(V-E)\psi_2 = 0$$

$$\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} + \frac{2m(V_0+E)}{\hbar^2}\psi_2 = 0 \qquad (E \le 0, \text{ men } V_0 + E \ge 0)$$

$$\left.\begin{aligned} \psi_2(x) &= A_2 e^{ik_2x} + B_2 e^{-ik_2x} \\ k_2 &= \sqrt{\frac{2m(V_0+E)}{\hbar}} \end{aligned}\right\} \quad \text{lærebok side 64/65}$$

Område (III):

$$\frac{\partial^2\psi_3}{dx_2^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi_3 = 0 \qquad (E \le 0)$$

$$\left.\begin{aligned} \psi_3(x) &= A_3 e^{k_3x} + B_3 e^{-k_3x} \\ k_3 &= \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar} \end{aligned}\right\} \quad \text{ditto}$$

Fysisk begrunnet betingelse:

$$\underline{A_3 = 0}$$

Grensebetingelse (I) ↔ (II):

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{A_2 = -B_2}$$

som gir

$$\psi_2(x) = \tilde{A}_2 \sin(k_2 x) \qquad (\tilde{A}_2 = 2iA_2)$$

Grensebetingelser (II) $\leftrightarrow$ (III):

$$\psi_2(a) = \psi_3(a)$$
$$\frac{d\psi_2}{dx}(a) = \frac{d\psi_3}{dx}(a)$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} \tilde{A}_2 \sin(k_2 a) &= B_3 e^{-k_3 a} \\ k_2 \tilde{A}_2 \cos(k_2 a) &= -k_3 B_3 e^{-k_3 a} \end{aligned}\right\}$$

Dermed finner vi svaret på spørsmål b) først!

b)

Dividerer de to siste likningene på hverandre, og får

$$\tan(k_2 a) = -\frac{k_2}{k_3}$$

$$\boxed{\tan\left(\frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar} a\right) + \sqrt{\frac{-(E+V_0)}{E}} = 0}$$ Krav til tillatte energinivåer

Ingen analytisk løsning for E i det generelle tilfellet.

c) (i samme slengen)

I grensen $E \to 0_-$:

$$\tan\left(\frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar} a\right) \approx -\sqrt{\frac{V_0}{|E|}}$$

Høyresiden $\to -\infty$; relasjonen vil i grensen være oppfylt av

$$\boxed{\sqrt{2mV_0 a^2} = \hbar \pi (n + \tfrac{1}{2}), \quad n = 0, 1, 2, \ldots}$$

For gitt a, kan man altså ha $E = 0$ for ∞ mange potensialdybder.
Uten å vite det sikkert, kan vi gjette på at $n = 0$ gir eneste tilstand i brønnen ved $E = 0$.

Tilbake til

a)

Vi normaliserer ved å sette

$$\int_0^\infty \psi^* \psi \, dx = \int_0^a \psi_2^* \psi_2 \, dx + \int_a^\infty \psi_3^* \psi_3 \, dx = 1$$

$$\int_0^a \psi_2^* \psi_2 \, dx = |\tilde{A}_2|^2 \int_0^a \sin^2(k_2 x)\, dx \qquad \left(y = k_2 x,\quad dx = \frac{1}{k_2} dy \right)$$

$$= \frac{1}{2k_2} |\tilde{A}_2|^2 \Big|_0^{k_2 a} (x - \sin x \cos x)$$

$$= \frac{1}{2k_2} |\tilde{A}_2|^2 \left(k_2 a - \sin(k_2 a) \cos(k_2 a) \right)$$

$$\int_a^\infty \psi_3^* \psi_3 \, dx = |B_3|^2 \int_a^\infty e^{-2k_3 x} dx \qquad \left(2k_3 x = y,\quad dx = \frac{1}{2k_3} dy \right)$$

$$= \frac{1}{2k_3} |B_3|^2 \int_{2k_3 a}^\infty e^{-y} dy$$

$$= \frac{1}{2k_3} |B_3|^2 e^{-2k_3 a}$$

Delvise forenklinger mulig:

$$k_3 |B_3|^2 e^{-2k_3 a} = -k_2 |\tilde{A}_2|^2 \sin(k_2 a) \cos(k_2 a)$$

Men ~~pga.~~ forskjellige koeffisienter, ser det ikke ut som sin() cos() - leddene kan kansellere.

$$\int_0^\infty \psi^* \psi \, dx = |A_2|^2 \left\{ \frac{a}{2} - \frac{1}{2k_2} \sin(k_2 a) \cos(k_2 a) - \frac{1}{2k_3^2} k_2 \sin(k_2 a) \cos(k_2 a) \right\} = 1$$

$$\boxed{|A_2| = \frac{1}{2} \left\{ a - \left(\frac{1}{k_2} + \frac{k_2}{k_3^2} \right) \sin(k_2 a) \cos(k_2 a) \right\}^{-1/2}}$$

Så kan man evt. skrive ψ/'ene opp eksplisitt, men det blir ikke pene uttrykk, så det lar vi likeså godt være!

4.12

Partikkel, masse m, i harmonisk oscillator-potensial, i første eksiterte tilstand.

a), b), c):

$\langle x\rangle$, $\langle p\rangle$ og $\langle p^2\rangle$ har vi allerede beregna i oppgave 3.1, som nettopp brukte første eksiterte tilstand!

d)

Bølgefunksjonen er

$$\psi_1(s) = C_1 2s e^{-s^2/2}$$

$$s = \frac{(Km)^{1/4}}{\hbar^{1/2}} x$$

Partikkelen er minst tilbøyelig til å bli observert ved $x = 0$ ($s=0$), hvor $|\psi_1|^2$ har et nullpunkt.

Det er størst sannsynlighet for å finne den der hvor $\frac{d}{ds}|\psi_1|^2 = 0$:

$$\frac{d}{ds}|\psi_1|^2 \propto \frac{d}{ds}(s^2 e^{-s^2})$$

$$= 2s e^{\cdots} + s^2(-2s) e^{\cdots}$$

$$= 0$$

Dvs. nullpunktene i ssh'en er ved

$$\underline{\underline{s = \pm 1}}$$

dvs.

$$\underline{\underline{x = \pm \hbar^{1/2}/(Km)^{1/4}}}$$

4.13

I uttrykket

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{K}{\mu}}$$

skal μ være redusert masse (lærebokas side 135).

For ett diatomig molekyl:

$$M \approx 2m \qquad \begin{cases} M - \text{molekylmasse} \\ m - \text{atommasse} \end{cases}$$

og

$$\mu = \frac{mm}{m+m} = \frac{1}{2} m$$

$\Rightarrow$

$$\underline{\mu \approx \frac{1}{4} M}$$

For eksempelvis nitrogen:

$$M \approx 14\, m_{proton}$$

Samla:

$$K = (2\pi f)^2 \mu$$
$$\approx \frac{1}{4}(2\pi f)^2 M$$
$$\approx 14\pi^2 f^2 M_{proton} \quad (\text{for } N_2)$$

Med tallverdi frå midt i det oppgitte området innsatt for f:

$$K_{N_2} \approx 14\pi^2 (10^{13})^2 1{,}67 \times 10^{-27} \text{ N/m} \approx \underline{\underline{23 \text{ N/m}}} \; (?)$$

4.14

Tidsuavhengig SL med $V = Kx^\beta$ innsatt:

$\boxed{\text{Merk trykkfeilen i løsningsforslaget i læreboka!}}$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + Kx^\beta \psi = E\psi$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{2mK}{\hbar^2} x^\beta \psi = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi$$

Humm humm, la oss se kva som skjer viss vi skalerer x med en faktor slik at konstanten foran x^β blir borte:

$$x = \zeta s \qquad (\text{gresk "zeta"})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} = \dfrac{1}{\zeta^2}\dfrac{\partial^2}{\partial s^2} \\ x^\beta = \zeta^\beta s^\beta \end{cases}$$

Det gir:

$$\frac{1}{\zeta^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} - \frac{2mK}{\hbar^2}\zeta^\beta s^\beta \psi = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} + \Big(\underbrace{\frac{2mE}{\hbar^2}\zeta^2}_{\lambda\,?} - \underbrace{\frac{2mK}{\hbar^2}\zeta^{2+\beta}}_{1\,?} s^\beta\Big)\psi = 0$$

Krev at konstanten foran s^β skal vere lik 1. Det gir:

$$\zeta = \left(\frac{\hbar^2}{2mK}\right)^{1/(2+\beta)}$$

Ved innsetting kommer likninga over på formen som er antyda i løsningsforslaget i læreboka, med

$$\lambda = \frac{2mE}{\hbar^2}\left(\frac{\hbar^2}{2mK}\right)^{2/(2+\beta)} \propto \frac{E}{m^{-\beta/(2+\beta)}}$$

Uttrykt på den skalerte formen, skal λ representere energien for alle systemer med en gitt verdi av β. De skalerte energinivåene skal ikke avhenge av m. Det betyr at for de *fysiske* energinivåene gjelder

$$\underline{E \propto m^{-\beta/(2+\beta)}}$$

(q.e.d. etter lærebokas tips!)