Løsninger til kapittel 5

5.1(d)

$$[A, BC] = ABC - BCA$$
$$= ABC - BAC - BCA + BAC$$
$$= [A,B]C + B[A,C]$$

5.4

a)
Med A, B, C hermiteske :

$$[A,B] = C$$
$$AB - BA = C$$
$$(AB)^+ - (BA)^+ = C^+$$
$$B^+A^+ - A^+B^+ = C^+$$
hermitisitet
$$BA - AB = C$$
$$[A,B] = -C$$

dvs. $\underline{C = 0}$!

b)
Med A og B hermiteske :

$$[A,B] = i\hbar$$
$$AB - BA = i\hbar$$
$$AB = BA + i\hbar$$
$$(AB)^+ = (BA)^+ - i\hbar$$
$$= A^+B^+ - i\hbar$$
$$= AB - i\hbar$$

dvs. $AB \neq (AB)^+$;
strengt ~~tatt~~ et tilfelle av manglende selv-konsistens !

5.5

a) Paritetsoperatoren hermitesk ? I så fall :

$$(\psi, \Pi\psi) = (\Pi^+\psi, \psi) = (\Pi\psi, \psi)$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)^* \psi(-x) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(-x)^* \psi(x)\, dx$$
$$= \int_{\infty}^{-\infty} \psi(y)^* \psi(-y)(-dy)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(y)^* \psi(-y)\, dy$$

OK; hermitesk!

b)
At $\psi(x)$ er egenfunksjon for ~~både~~ H og Π, innebærer at H og Π må ~~kommutere~~:

$$[H, \Pi] = 0$$

Det kan ikke være tilfelle med mindre $V(x) = V(-x)$.
(Siden $\frac{1}{2m}p^2$ er kvadratisk i $\frac{\partial}{\partial x}$, kommuterer ~~det uansett~~ med Π.)

5.6

a) $$\langle q \rangle = \int \Psi^*(\vec{r},t)\, Q\, \Psi(\vec{r},t)\, d^3r \quad ; \quad \Psi = \psi e^{-i\omega t}$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\langle q \rangle = \int \Big\{ \underbrace{i\hbar \frac{\partial}{\partial t}}_{-\hbar\omega} \Psi^*(\vec{r},t)\, Q\, \Psi(\vec{r},t) + \Psi^*(\vec{r},t)\, Q\, \underbrace{i\hbar \frac{\partial}{\partial t}}_{\hbar\omega} \Psi(\vec{r},t) \Big\} d^3r$$

$$= \int \Psi^*(\vec{r},t) \left[-EQ + QE \right] \Psi(\vec{r},t)\, d^3r$$

$$= \int \Psi^*(\vec{r},t)\, [Q,H]\, \Psi(\vec{r},t)\, d^3r$$

$$= \langle [Q,H] \rangle$$

Ehrenfests teorem, som skulle vises!

b)
Fra eksempel 5.2 (side 97 i læreboka):

$$[H, P] = i\hbar \frac{\partial V}{\partial x}$$

Så hvis vi spesialiserer Ehrenfests teorem til 1D:

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle p \rangle = \frac{1}{i\hbar}(-1)\langle \underbrace{[H,P]}_{i\hbar \frac{\partial V}{\partial x}} \rangle$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle p \rangle = \left\langle -\frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle \quad \text{(som skulle vises)}$$

Klassisk:
Høyre side = kraft ; venstre side = $\frac{\partial}{\partial t} mv$;
så dette må være impulsloven.

25/3

5.8

Operator T: $T = \alpha Q^{+} Q$, α reell, Q ikke nødvendigvis hermitesk.

$$
\begin{aligned}
T^{+} &= (\alpha Q^{+} Q)^{+} \\
&= \alpha Q^{+} (Q^{+})^{+} \\
&= \alpha Q^{+} Q \\
&= T
\end{aligned}
$$

T altså hermitesk! (kan det virkelig være så enkelt...)

5.10

Vi har

$$[P, Q] = Q$$

$$P\psi = p\psi$$

Prøv:

$$
\begin{aligned}
[P, Q]\psi &= Q\psi \\
P(Q\psi) - \underbrace{Q(P\psi)}_{pQ\psi} &= Q\psi \\
P(Q\psi) &= (1+p)(Q\psi)
\end{aligned}
$$

Dette resultatet ser lettere selvmotsigende ut. Men husk at p er egenverdi som tilsvarer ψ, mens P i nederste likning projiserer ut egenverdien $(1+p)$ for egenfunksjonen $Q\psi$!