Løsning oppgave 6.16

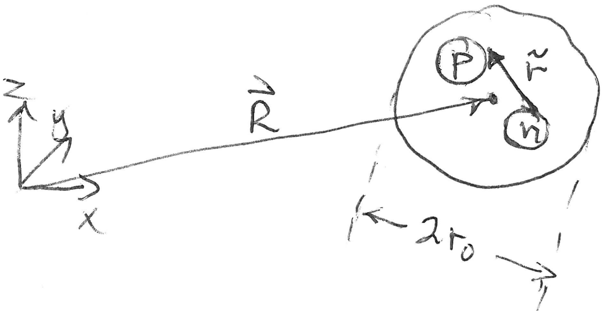
(For løsning til de andre oppgavene fra kap. 6, gå til lenken "Lærebokoppgave løsninger")

6.16 The deuteron is a nucleus of "heavy hydrogen" consisting of one proton and one neutron. As a simple model for this nucleus, consider a single particle of mass m moving in a fixed spherically-symmetric potential $V(r)$, defined by $V(r) = -V_0$ for $r < r_0$ and $V(r) = 0$ for $r > r_0$. This is called a spherical square-well potential. Assume that the particle is in a bound state with $l = 0$.

(a) Find the general solutions $R(r)$ to the radial Schrödinger equation for $r < r_0$ and $r > r_0$. Use the fact that the wave function must be finite at 0 and ∞ to simplify the solution as much as possible. (You do not have to normalize the solutions.)

(b) The deuteron is only just bound; i.e., E is nearly equal to 0. Take m to be the proton mass, $m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg, and take r_0 to be a typical nuclear radius, $r_0 = 1 \times 10^{-15}$ m. Find the value of V_0 (the depth of the potential well) in MeV (1 MeV $= 1.6 \times 10^{-13}$ J). (Hint: The continuity conditions at r_0 must be used. The radial wave function $R(r)$ and its derivative $R'(r)$ must both be continuous at r_0; this is equivalent to requiring that $u(r)$ and $u'(r)$ must both be continuous at r_0, where $u(r) = rR(r)$. The resulting equations cannot be solved exactly but can be used to derive the value for V_0.)

[Hvordan skal denne oppgaven oppfattes?



$m_p \approx m_n$

$\Rightarrow$ naturlig koordinatvalg er

$\tilde{\vec r} = \vec r_p - \vec r_n$ (relativkoordinat)

$\vec R = \frac{1}{2}(\vec r_p + \vec r_n)$

fordi da er

$\vec r_p \approx \vec R + \frac{1}{2}\tilde{\vec r}$

$\vec r_n \approx \vec R - \frac{1}{2}\tilde{\vec r}$

Deuteriumkjernen er ikke en potensialboks der nukleonene skrangler tilfeldig rundt; nukleonene ligger tilnærmet symmetrisk omkring massesenteret, og de føler innbyrdes en kraft fra hverandre rettet gjennom massesenteret.

Slik sett kan hvert nukleon oppfattes å bevege seg i et sfærisk symmetrisk potensial (gitt ved dets avstand fra massesenteret), som strengt tatt skyldes det andre nukleonet plassert symmetrisk på den andre siden.

Dette er en "semiklassisk" betraktningsmåte. Kjernekreftene er båret av utvekslede mesoner. (Meget overfladisk sagt.)

Sett $\vec R = 0$ slik at nukleonene ligger symmetrisk omkring origo. For eksempelvis protonet, gjelder da potensialet $V(r)$, der

$\vec r = \frac{1}{2}\tilde{\vec r}$

er posisjonsvektoren fra massesenteret.]

Vi antar altså

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & (r<r_0,\ \text{bundet tilstand}) \\ 0 & (r>r_0,\ \text{kjernekrefter kort rekkevidde, ubundet tilstand}) \end{cases}$$

samt en bundet tilstand med angulært moment $l=0$.

a)

I den radielle Schrödinger likningen

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial r^2}u(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}u(r) + V(r)u(r) = Eu(r) \qquad \boxed{u(r) = rR(r)}$$

kan vi altså se bort fra det vinkelavhengige leddet, og får

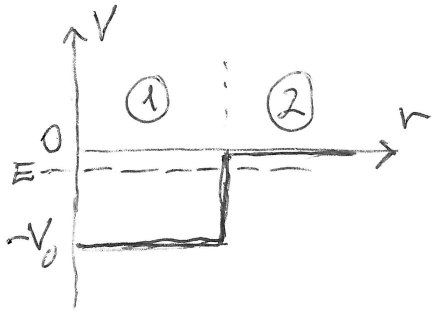
$$\frac{\partial^2 u(r)}{\partial r^2} + Au(r) = 0 \ , \qquad A = \frac{2m(E-V)}{\hbar^2}$$

med løsning (samme notasjon som i læreboka s. 64/65!)

$$u(r) = C_1 e^{\sqrt{-A}\,r} + C_2 e^{-\sqrt{-A}\,r}$$

der positive A gir imaginær eksponent; det tilsvarer å skrive løsningen som

$$u(r) = D_1 \cos(\sqrt{A}\,x) + D_2 \sin(\sqrt{A}\,x)$$



Det er oppgitt at deuteronet er ~~nesten~~ ubundet. $(E<0)$
underforstått ekspont usagt:

$$0 < |E| \ll V_0$$

For $r<r_0$: (Område 1)

$$A = \frac{2m(V_0-|E|)}{\hbar^2}$$

$$\Rightarrow \quad u_1(r) = D_1\cos(k_1 r) + D_2 \sin(k_1 r), \qquad k_1 = \frac{2m\sqrt{V_0-|E|}}{\hbar}$$

For $r>r_0$: (Område 2)

$$A = \frac{2m(-|E|)}{\hbar^2}$$

$$\Rightarrow \quad u_2(r) = C_1 e^{k_2 r} + C_2 e^{-k_2 r}, \qquad k_2 = \frac{2m\sqrt{|E|}}{\hbar}$$

Krav v/ $r = 0$:

$R = \frac{1}{r}u < \infty \Rightarrow D_1 = 0$: $\boxed{u_1(r) = D_2 \sin(k_1 r)}$, $\frac{du_1(r)}{dr} = k_1 D_2 \sin(k_1 r)$

Krav v/ $r \to \infty$

$R = \frac{1}{r}u < \infty \Rightarrow C_1 = 0$: $\boxed{u_2(r) = C_2 e^{-k_2 r}}$, $\frac{du_2(r)}{dr} = -k_2 C_2 e^{-k_2 r}$

b)

Betingelse v/ $r = r_0$: Både $u(r)$ og $\frac{du(r)}{dr}$ kontinuerlige.

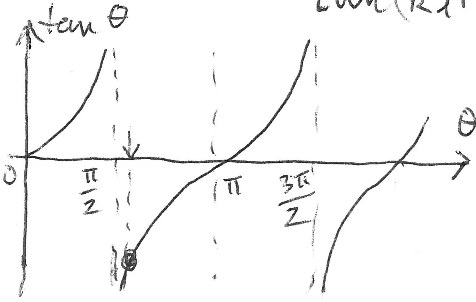
$$D_2 \sin(k_1 r_0) = C_2 e^{-k_2 r_0}$$
$$k_1 D_2 \cos(k_1 r_0) = -k_2 C_2 e^{-k_2 r_0}$$

Divider likningene på hverandre:

$$\frac{1}{k_1} \tan(k_1 r_0) = -\frac{1}{k_2}$$

To ukjente, V_0 og $|E|$, med bare én likning — men legg på betingelsen $|E| \ll V_0$:

$$\tan(k_1 r_0) = -\sqrt{\frac{V_0 - |E|}{|E|}} \quad \left(\text{der } \sqrt{\frac{V_0-|E|}{|E|}} \gg 1 \text{ antas}\right)$$



Ta arctan og anta minst mulig V_0:

$$\frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar} r_0 = \frac{\pi}{2}(1+\varepsilon)$$

($\varepsilon \ll 1$ men likegyldig for den approksimative regningen)

Altså:

$$\boxed{V_0 = \frac{\pi^2}{8} \frac{\hbar^2}{m_p r_0^2} = \frac{1}{32} \frac{h^2}{m_p r_0^2}}$$

Tallverdier:

$r_0 = 1 \times 10^{-15}$ m, $m_p = 1.67 \times 10^{-27}$ kg, $h = 6.626 \times 10^{-34}$ Js,

1 MeV = 1.6×10^{-13} J

$$\Rightarrow \quad V_0 = \frac{1}{32} \frac{(6.626 \times 10^{-34})^2}{1.67 \times 10^{-27} \times (10^{-15})^2} \text{ J} \approx \frac{0.821 \times 10^{-11}}{1.6 \times 10^{-13}} \text{ MeV}$$

dvs. $\boxed{V_0 \approx 51 \text{ MeV}}$

Konsistens? Wikipedia forteller at bindings
Wikipedia forteller: Bindingsenergi pr nukleon ≈ 2.2 MeV for nukleonene i et deuteron, altså $|E| \ll V_0$ ---

OK regnemåte!