Løsninger til kapittel 6

6.2

Energier i boks:

$$E = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\left(\frac{n_x^2}{a^2}+\frac{n_y^2}{b^2}+\frac{n_z^2}{c^2}\right), \quad \text{med } a=b=c.$$

Grunntilstandsenergi:

$$n_x = n_y = n_z = 1 \quad \Rightarrow \quad E_{111} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}\cdot 3$$

Kvikt nok å se at $14 = 1^2+2^2+3^2$.

Ettersom (123) har 6 permutasjoner, dvs. denne eksiterte tilstanden har 6-foldig degenerasjon — det er 6 forskjellige bølgefunksjoner for denne energien.

6.3

OBS: I denne oppgaven er det en ikke-triviell tvetydighet. Skal vi skjelne mellom forskjellige måter å fordele de oppgitte sidekantlengdene på og slik få en multiplikativ faktor 3 i multiplisitetene i både a) og b)? Vi løser oppgaven som det er en gitt geometri, altså bare ett sett kantplasseringer, og ingen ekstra faktor 3.

a)
Hvis bare ett kvantetall skal økes, må vi plassere det på den største nevneren for å få lavest mulig oppgang og slik komme til laveste (første) eksiterte tilstand:

$$\frac{1^2}{a^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{2^2}{(2a)^2} = \frac{(\sqrt{3})^2}{a^2}$$

$$E_{112} = 3\,\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$$

Det er bare en plasseringsmulighet, dvs. ingen degenerasjon.

b)
Også her må kvantetallet på en av de lange kantene økes:

$$\frac{1^2}{a^2}+\frac{1^2}{(2a)^2}+\frac{2^2}{(2a)^2} = \frac{(3/2)^2}{a^2}$$

$$E_{112} = \frac{9}{4}\,\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$$

Her er det to plasseringer å velge mellom, dvs. 2-foldig degenerasjon.

6.5

$$
\begin{aligned}
L_x &= YP_z - ZP_y \\
L_x^\dagger &= (YP_z)^\dagger - (ZP_y)^\dagger \quad \} \text{ produktregel} \\
&= P_z^\dagger Y^\dagger - P_y^\dagger Z^\dagger \quad \} \text{ hermitisitet} \\
&= P_z Y - P_y Z \quad \} \text{ kommutativitet} \\
&= YP_z - ZP_y \\
&= L_x, \quad \text{qed!}
\end{aligned}
$$

Regningen for L_y blir så tilsvarende at vi skipper den her!

6.8

$$\dim \vec{J} = \dim(\vec{r}) \cdot \dim(\vec{p})$$
$$= L \cdot MLT^{-1}$$
$$= MLT^{-2} \cdot L \cdot T$$
$$= FLT$$

Altså benevning Nms = Js. Samme som $\hbar$; qed

6.9

Gitt:
$$[Q, H] = E_0 Q$$
$$H\psi = E\psi$$

Utskrevet og utregna:

$$Q(\overset{E}{H\psi}) - H(Q\psi) = E_0(Q\psi)$$
$$E(Q\psi) - H(Q\psi) = E_0(Q\psi)$$
$$H(Q\psi) = (E - E_0)(Q\psi)$$

$Q\psi$ er altså en egenfunksjon for H med egenverdi $(E - E_0)$.
Merk deg likheta med reguinga i oppgave 5.8 !

6.10 *

6.12

Med $l = 0$:
$$\vec{L}^2\psi = 0(0+1)\hbar^2\psi = 0$$
$$L_z\psi = m_z\hbar\psi = 0$$

Det er fremdeles slik at ingen komponent av en vektor kan være lenger enn vektoren sjøl:

$$\underbrace{(\psi, \vec{L}^2\psi)}_{0} - \underbrace{(\psi, \underset{L_z(L_z\psi)}{L_z^2\psi})}_{0} = \underbrace{(\psi, L_x(L_x\psi)) - (\psi, L_y(L_y\psi))}_{0}$$

Siden høyresida skal være lik 0, forutsetter det $L_x\psi = L_y\psi = 0$.
qed

*) Se neste side :)

2 3 5 8 9 12

6.10

(Kommentarer:

1. Spørsmål b) er i hovedsak løst allerede i oppgave 6.9; vi baserer oss på det resultatet.
2. Spørsmål a) kan besvares ved å bruke de eksplisitte uttrykkene for H og $a_\pm$, men det blir "grisregning", mindre elegant enn kommutatormetoden som er brukt her.
3. Strengt tatt vet vi ikke at betegnelsen "stigeoperatorer" er korrekt før vi har gjort spørsmål b) !)

a)

Omskriving:

$$H = \frac{1}{2m}P^2 + \frac{1}{2}KX^2 \quad \text{(her kunne vi ha brukt } P = -i\hbar D\text{)}$$

$$a_\pm = \sqrt{\frac{K}{2}}X \mp \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}D \quad \left(D = \frac{d}{dx}\right)$$

$$[H, a_\pm] = \left[\frac{1}{2m}P^2 + \frac{K}{2}X^2, \sqrt{\frac{K}{2}}X \mp \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}D\right]$$

$$= \frac{1}{2m}\sqrt{\frac{K}{2}}[P^2, X] \boxed{+\left(\frac{K}{2}\right)^{3/2}[X^2, X]} \boxed{\mp \frac{1}{2m}\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}[P^2, D]} \mp \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{K}{2}[X^2, D]$$

De skraverte bidragene er null pga. kommutatorene.
Vi skal bruke de kjente resultatene fra kapittel 5:

$$DX = 1 + XD \Rightarrow [X, D] = -1$$

$$[P, X] = -i\hbar$$

$$[BC, A] = [B, A]C + B[C, A] \quad \text{(fortegn snudd)}$$

$$\left.\begin{aligned}[PP, X] &= [P, X]P + P[P, X] \\ &= -2i\hbar P\end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned}B &= C = P \\ A &= X\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}[XX, D] &= [X, D]X + X[X, D] \\ &= 2[X, D]X \\ &= -2X\end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned}B &= C = X \\ A &= D\end{aligned}$$

$$[H, a_\pm] = \frac{1}{2m}\sqrt{\frac{K}{2}}(-2i\hbar)(-i\hbar D) \mp \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{K}{2}(-2X)$$

$$= -\hbar\omega\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}D \pm \hbar\omega\sqrt{\frac{K}{2}}X \quad \left(\text{brukt } \sqrt{\frac{K}{m}} = \omega\right)$$

$$= \pm\hbar\omega\left(\sqrt{\frac{K}{2}}X \mp \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}D\right)$$

$$= \pm\hbar\omega\, a_\pm \quad \underline{\text{som skulle vises!}}$$

b)

~~Fra~~ oppgave 6.9: $[H, Q] = + E_0 Q$, $H\psi = E\psi$

Anvendt her: (definisjonsspørsmål)

$$[H, a_\pm] = \underbrace{\pm\hbar\omega}_{E_0}\, a_\pm$$

$$H(a_\pm\psi) - a_\pm(\underbrace{H\psi}_{E}) = \pm\hbar\omega a_\pm\psi$$

$$\underline{H(a_\pm\psi) = (E \pm \hbar\omega)\, a_\pm\psi}$$ som skulle vises

$a_\pm\psi$ gir en ny egentilstand med hevet/senket energi.

c)

$$a_+ a_- \psi = \frac{K}{2}X^2\psi - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\sqrt{\frac{K}{2}}\,DX\psi + \sqrt{\frac{K}{2}}\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}XD\psi - \frac{\hbar^2}{2m}D^2\psi$$

$$= \underbrace{\left(-\frac{\hbar^2}{2m}D^2 + \frac{K}{2}X^2\right)}_{H}\psi - \underbrace{\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\sqrt{\frac{K}{2}}}_{\frac{1}{2}\hbar\omega}\underbrace{(DX - XD)}_{1}\psi$$

Dermed altså:

$$\underline{a_+ a_- = H - \tfrac{1}{2}\hbar\omega}$$ som skulle vises

d)

Anvendt på grunntilstanden ψ_0:

$$H\psi_0 = a_+ \underbrace{a_-\psi_0}_{=0} + \frac{1}{2}\hbar\omega\psi_0$$

$\boxed{\text{for grunntilstanden! Kan ikke ha lavere tilstand}}$

$$H\psi_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega\psi_0$$

som skulle vises!

e)

Skrevet som likning og løst:

$$H\psi_0 = \sqrt{\frac{K}{2}}\,x\psi_0 + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{\partial}{\partial x}\psi_0 = 0$$

$$\frac{d}{dx}\psi_0 = -\sqrt{\frac{K}{2}}\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\,x\psi_0 = -\frac{m\omega}{\hbar}x\psi_0$$

$$\int\frac{d\psi_0}{\psi_0} = -\frac{m\omega}{\hbar}\int x\,dx$$

$$\ln\psi_0 = -\frac{m\omega}{2\hbar}x^2 + \text{konstant}$$

$$\underline{\psi_0 = A\, e^{-(m\omega/2\hbar)x^2}}$$

Og så kan man finne A ved normalisering på vanlig måte!

6.14

Å beregne sannsynligheta for å finne elektronet innafor "hydrogenatomradien" 10^{-10} m:

Vi bruker skalering med $a_0 = 5.2918 \times 10^{-11}$ m, dvs.:

$$b a_0 = \frac{10}{5.2918} \times a_0$$

$$b = 1.8897$$

$$P = \int_{r=0}^{b a_0} 4\pi r^2 dr \, \frac{1}{\pi} \frac{1}{(a_0)^3} e^{-2r/a_0}$$

$$= \frac{4}{a_0^3} \int_0^{b a_0} r^2 dr \, e^{-2r/a_0} \quad \Big] \quad r = \frac{a_0}{2} s$$

$$= \frac{4}{a_0^3} \left(\frac{a_0}{2}\right)^3 \int_0^{2b} s^2 ds \, e^{-s}$$

$$\int_0^{2b} s^2 e^{-s} ds = \left[-s^2 e^{-s}\right]_0^{2b} + 2\int_0^{2b} s e^{-s} ds$$

$$= -\frac{(2b)^2}{e^{2b}} + 2\left[-s e^{-s}\right]_0^{2b} + 2\int_0^{\infty} e^{-s} ds$$

$$= -\frac{4b^2 + 4b}{e^{2b}} + 2\left[-e^{-s}\right]_0^{2b}$$

$$= 2 - \frac{4b^2 + 4b + 2}{e^{2b}}$$

Tallverdi innsatt:

$$e^{-2b} = 0.022836$$

$$2b^2 + 2b + 1 = 11.9213$$

$$P = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{4b^2 + 4b + 2}{e^{2b}}\right) = \underline{\underline{0.728}}$$

6.15

a)

$l = 1$: Lavest mulig energi tilsvarer $n = l + 1 = \underline{2}$

Høyest mulig $m_l = l$

$$\Rightarrow \underline{(n, l, m_l) = (2, 1, 1)}$$

b)

Uansett radialoppførselen til det sfærisk symmetriske potensialet, er angulæroppførselen gitt i $Y_l^{m_l}$. Den eneste sfærisk symmetriske sfæriske harmoniske er Y_0^0 (se øverst side 133 i læreboka):

$$\underline{(l, m_l) = (0, 0)}$$

(L 6/6)

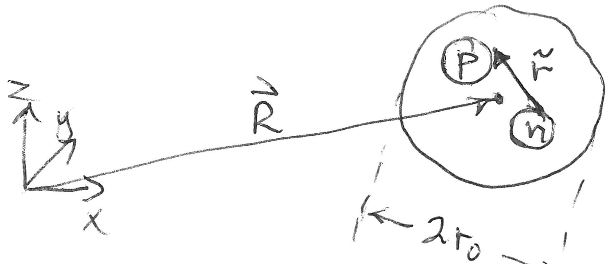
Løsning oppgave 6.16

6.16 The deuteron is a nucleus of "heavy hydrogen" consisting of one proton and one neutron. As a simple model for this nucleus, consider a single particle of mass m moving in a fixed spherically-symmetric potential $V(r)$, defined by $V(r) = -V_0$ for $r < r_0$ and $V(r) = 0$ for $r > r_0$. This is called a spherical square-well potential. Assume that the particle is in a bound state with $l = 0$.

(a) Find the general solutions $R(r)$ to the radial Schrödinger equation for $r < r_0$ and $r > r_0$. Use the fact that the wave function must be finite at 0 and ∞ to simplify the solution as much as possible. (You do not have to normalize the solutions.)

(b) The deuteron is only just bound; i.e., E is nearly equal to 0. Take m to be the proton mass, $m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg, and take r_0 to be a typical nuclear radius, $r_0 = 1 \times 10^{-15}$ m. Find the value of V_0 (the depth of the potential well) in MeV (1 MeV $= 1.6 \times 10^{-13}$ J). (Hint: The continuity conditions at r_0 must be used. The radial wave function $R(r)$ and its derivative $R'(r)$ must both be continuous at r_0; this is equivalent to requiring that $u(r)$ and $u'(r)$ must both be continuous at r_0, where $u(r) = rR(r)$. The resulting equations cannot be solved exactly but can be used to derive the value for V_0.)

[Hvordan skal denne oppgaven oppfattes?



$\underline{m_p \simeq m_n}$

$\Rightarrow$ naturlig koordinatvalg er

$$\vec{\tilde{r}} = \vec{r}_p - \vec{r}_n \quad \text{(relativkoordinat)}$$

$$\vec{R} = \frac{1}{2}(\vec{r}_p + \vec{r}_n)$$

fordi da er

$$\vec{r}_p \approx \vec{R} + \frac{1}{2}\vec{\tilde{r}}$$

$$\vec{r}_n \approx \vec{R} - \frac{1}{2}\vec{\tilde{r}}$$

Deuteriumkjernen er ikke en potensialboks der nukleonene skrangler tilfeldig rundt; nukleonene ligger tilnærmet symmetrisk omkring massesenteret, og de føler innbyrdes en kraft fra hverandre rettet gjennom massesenteret.

Slik sett kan hvert nukleon oppfattes å bevege seg i et sfærisk symmetrisk potensial ("gitt ved ens avstand") fra massesenteret, som strengt tatt skyldes det andre nukleonet plassert ~~symmetrisk~~ på den andre siden.

Dette er en "semiklassisk" betraktningsmåte. Kjernekreftene er båret av utvekslede <u>mesoner</u>. (<u>Meget</u> overfladisk sagt!)

Sett $\vec{R} = 0$ slik at nukleonene ligger symmetrisk omkring origo. For eksempelvis protonet, gjelder da potensialet $V(r)$, der

$$\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{\tilde{r}}$$

er posisjonsvektoren fra massesenteret.]

Vi antar altså

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & (r < r_0, \text{ bundet tilstand}) \\ 0 & (r > r_0, \text{ kjernekrefter kort rekkevidde, ubundet tilstand}) \end{cases}$$

samt en bundet tilstand med angulært moment $l = 0$.

a)

I den radielle Schrödinger likningen

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial r^2}u(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}u(r) + V(r)u(r) = Eu(r) \qquad \boxed{u(r) = rR(r)}$$

kan vi altså se bort fra det vinkelavhengige leddet, og får

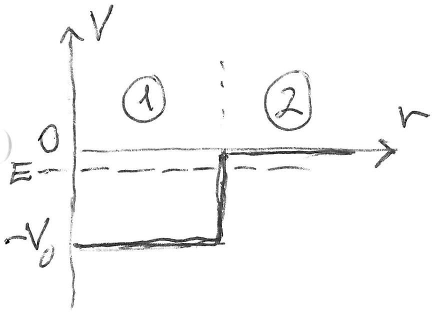
$$\frac{\partial^2 u(r)}{\partial r^2} + Au(r) = 0 \quad , \qquad A = \frac{2m(E-V)}{\hbar^2}$$

med løsning (samme notasjon som i læreboka s. 64/65!)

$$u(r) = C_1 e^{\sqrt{-A}\,r} + C_2 e^{-\sqrt{-A}\,r}$$

der positive A gir imaginær eksponent; det tilsvarer å skrive løsningen som

$$u(r) = D_1 \cos(\sqrt{A}\,x) + D_2 \sin(\sqrt{A}\,x)$$



Det er oppgitt at deuteronet er ~~nesten~~ ubundet. $(E < 0)$
underforstått eksplisitt usagt:

$$0 < |E| \ll V_0$$

For $r < r_0$: (Område 1)

$$A = \frac{2m(V_0 - |E|)}{\hbar^2}$$

$$\Rightarrow \quad u_1(r) = D_1 \cos(k_1 r) + D_2 \sin(k_1 r) \, , \qquad k_1 = \frac{2m\sqrt{V_0 - |E|}}{\hbar}$$

For $r > r_0$: (Område 2)

$$A = \frac{2m(-|E|)}{\hbar^2}$$

$$\Rightarrow \quad u_2(r) = C_1 e^{k_2 r} + C_2 e^{-k_2 r} \, , \qquad k_2 = \frac{2m\sqrt{|E|}}{\hbar}$$

Krav v/ $r=0$:

$R = \frac{1}{r}u < \infty \Rightarrow D_1 = 0$: $\boxed{u_1(r) = D_2 \sin(k_1 r)}$, $\frac{du_1(r)}{dr} = k_1 D_2 \sin(k_1 r)$

Krav v/ $r \to \infty$

$R = \frac{1}{r}u < \infty \Rightarrow C_1 = 0$: $\boxed{u_2(r) = C_2 e^{-k_2 r}}$, $\frac{du_2(r)}{dr} = -k_2 C_2 e^{-k_2 r}$

b)

Betingelse v/ $r = r_0$: Både $u(r)$ og $\frac{du(r)}{dr}$ kontinuerlige.

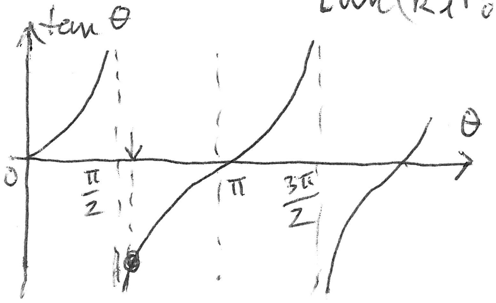
$$D_2 \sin(k_1 r_0) = C_2 e^{-k_2 r_0}$$
$$k_1 D_2 \cos(k_1 r_0) = -k_2 C_2 e^{-k_2 r_0}$$

Divider likningene på hverandre:

$$\frac{1}{k_1}\tan(k_1 r_0) = -\frac{1}{k_2}$$

To ukjente, V_0 og $|E|$, med bare én likning — men legg på betingelsen $|E| \ll V_0$:

$$\tan(k_1 r_0) = -\sqrt{\frac{V_0 - |E|}{|E|}} \quad \left(\text{der } \sqrt{\frac{V_0-|E|}{|E|}} \gg 1 \text{ antas}\right)$$



Ta arctan og anta minst mulig V_0:

$$\frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar} r_0 = \frac{\pi}{2}(1+\varepsilon)$$

($\varepsilon \ll 1$ men likegyldig for den approksimative regningen)

Altså:

$$\boxed{V_0 = \frac{\pi^2}{8}\frac{\hbar^2}{m_p r_0^2} = \frac{1}{32}\frac{h^2}{m_p r_0^2}}$$

Tallverdier:

$r_0 = 1 \times 10^{-15}$ m, $m_p = 1.67 \times 10^{-27}$ kg, $h = 6.626 \times 10^{-34}$ Js,

1 MeV $= 1.6 \times 10^{-13}$ J

$\Rightarrow$

$$V_0 = \frac{1}{32}\frac{(6.626\times 10^{-34})^2}{1.67\times 10^{-27}\times(10^{-15})^2}\text{ J} \approx \frac{0.821\times 10^{-11}}{1.6\times 10^{-13}}\text{ MeV}$$

dvs.

$$\boxed{V_0 \approx 51 \text{ MeV}}$$

Konsistens? Wikipedia forteller at bindings

Wikipedia forteller: Bindingsenergi pr nukleon $\approx$ 2.2 MeV for nukleonene i et deuteron, altså $|E| \ll V_0$ ---

OK regnemåte! OVERSLAGSMESSIG?