Oppgaveløsninger til kapittel 7

7.1

Matrisen

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$$

a)

$$Q^{+} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$$

b)
Matrisen er altså hermitesk, $Q^{+} = Q$.

c)
Egenverdier:

$$|Q - cI| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-c & i \\ -i & -1-c \end{vmatrix} = 0 = -(1+c)(1-c) - (-i)i$$
$$= c^2 - 2$$

Egenverdiene er $\underline{\underline{c = \pm\sqrt{2}}}$ (reelle, sjølsagt)

d)

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \pm\sqrt{2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$x_1 + i x_2 = \pm\sqrt{2}\, x_1$$
$$-i x_1 - x_2 = \pm\sqrt{2}\, x_2$$

(Nederste likning sier akkurat det samme som den øverste:
Flytt over i den nederste, multipliser med i, få:

$$-i x_1 = \pm(\sqrt{2} \pm 1) x_2$$
$$x_1 = \pm i(\sqrt{2} \pm 1) x_2$$

mens den øverste gir

$$\mp(\sqrt{2} \mp 1) x_1 = -i x_2$$
$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{\pm i x_2}{(\sqrt{2} \mp 1)} = \frac{\pm i x_2 (\sqrt{2} \pm 1)}{(\sqrt{2} \mp 1)(\sqrt{2} \pm 1)} = \pm i(\sqrt{2} \pm 1) x_2 \;)$$

$\underline{c = +\sqrt{2}}$:
Velg f. eks. $x_2 = 1$ og få $x_1 = i(\sqrt{2}+1)$, dvs. egenvektor

$$\begin{pmatrix} i(\sqrt{2}+1) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\underline{c = -\sqrt{2}}$:
Velg f. eks. $x_1 = 1$ og få $i x_2 = -(\sqrt{2} + 1)$, dvs. $x_2 = i(\sqrt{2}+1)$,
altså egenvektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i(\sqrt{2}+1) \end{pmatrix}$$

Man kan ikke få den ene ved å multiplisere den andre med en konstant, og deres indre produkt er lik 0! Ortogonalitet!

7.2

Operatoren

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a)

$$A^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$ altså hermitesk.

b)

$$\begin{vmatrix} 1-c & 0 & 1 \\ 0 & -c & 0 \\ 1 & 0 & 1-c \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{aligned} &= -c(1-c)^2 - (-c)1\cdot 1 \\ &= -c(1-2c+c^2) + c \\ &= c^2(2-c) \end{aligned}$$

Egenverdier 0, 0, 2.

c = 0 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} &x_1 = -x_3 \\ &x_2 = \text{hvasomhelst} \end{aligned}$$

Egenvektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \text{hvasom helst} \\ -1 \end{pmatrix}$$

c = 2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} &x_1 = x_3 \\ &x_2 = 0 \end{aligned}$$

Egenvektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c)

Det er antagelig uvanlig at egenvektoren for $c=0$ har en helt vilkårlig komponent.

Men også i denne oppgaven finner man at indre produkt mellom de to egenvektorene er lik 0.

7.3

A : matrise med elementer forskjellig fra 0 bare på diagonalen.

Å finne egenverdier:

$$\begin{vmatrix} A_{11}-c & & & 0 \\ & A_{22}-c & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_{nn}-c \end{vmatrix} = 0 = (A_{11}-c)(A_{22}-c)\dots(A_{nn}-c)$$

Egenverdiene gis av diagonalelementene etter tur!

Egenvektorer:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & & & \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A_{rr}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad 1 \le r \le n$$

$\Rightarrow$ $\det(A)=0$ og helt vilkårlige egenvektorer hvis noe diagonalelement er lik 0. Men hvis ikke,

$$A_{ss}x_s = A_{rr}x_s$$

Forutsatt ingen degenerasjon (alle diagonalelementene ulike samt ikke-null):

$$A_{ss} \neq A_{rr} \Rightarrow \begin{cases} x_s = 0 & (s \neq r) \\ x_s = 1 & (s = r, \text{ og normalisert}) \end{cases}$$

Dvs. egenverdi $c = A_{rr}$ gir egenvektor

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{posisjon } r$$

Hvis noen diagonalelementer like, fås en mer komplisert sak hvor flere vektorkomponenter kan være ikke-null.

7.4

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}, \quad \mathrm{tr}(B) = \sum_{j=1}^{n} B_{jj}$$

a)

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}, \quad (BA)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} B_{ik}A_{kj}$$

$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{ki} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} B_{ki}A_{ik} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} B_{ik}A_{ki} = \mathrm{tr}(BA)$$

som skulle vises

b) Standard utledning i lærebøker i lineær algebra, vi overlater dette punktet til dem ...

7.5

$$c^*(1\ \ -1)\,c\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = |c|^2(1+1) = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$c^*(1\ \ -i\ \ -1)\,c\begin{pmatrix}1\\i\\-1\end{pmatrix} = |c|^2(1+1+1) = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$c^*(-1\ \ 2\ \ -3\ \ 4)\,c\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\\4\end{pmatrix} = |c|^2(1+4+9+16) = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{30}}$$

c - verdiene blir normaliseringskonstanter (multiplikative)

7.6

Hermitesk Q er stikkordet her:

Partikkel i tilstand $|\phi\rangle$, i rommet med basis $|\psi_1\rangle, \ldots, |\psi_n\rangle$

$$\langle Q^2\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle\phi|Q|\psi_j\rangle\langle\psi_j|Q|\phi\rangle$$

(men her er $Q = Q^+$)

$$= \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\langle\phi|Q|\psi_j\rangle}_{\text{komplekst tall}}\underbrace{(\langle\phi|Q^+|\psi_j\rangle)^+}_{\text{komplekst tall}}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} |\langle\phi|Q|\psi_j\rangle|^2$$

som skulle vises

7.7

$|\psi_1\rangle, \ldots, |\psi_n\rangle$ ortonormalt basissett, og alle basisvektorene egenvektorer for Q:

$$Q|\psi_j\rangle = q_j|\psi_j\rangle$$

I så fall:

$$\langle Q\rangle = \langle\phi|Q|\phi\rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \langle\phi|\underbrace{Q|\psi_j\rangle}_{\Rightarrow q_j\psi_j}\langle\psi_j|\phi\rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{n} q_j\langle\phi|\psi_j\rangle\langle\psi_j|\phi\rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{n} q_j\langle\phi|\psi_j\rangle(\langle\phi|\psi_j\rangle)^+$$

$$= \sum_{j=1}^{n} q_j|\langle\phi|\psi_j\rangle|^2$$

som skulle vises

7.8

Unitær operator U : $\quad U^+U = I$ (enhetsoperator)

For ortonormalt sett vektorer $|\psi_1\rangle, \dots, |\psi_n\rangle$:

$$\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \delta_{ij}$$
$$= \langle\psi_i|I|\psi_j\rangle$$
$$= \underbrace{\langle\psi_i|U^+}_{\text{dualt til } U|\psi_i\rangle}\underbrace{U|\psi_j\rangle}$$

Settet $U|\psi_i\rangle$ er da også et sett ortonormale vektorer – som skulle vises

7.10

$$\langle Q\rangle = \sum_m E_m |\langle\phi|Z|\psi_m\rangle|^2$$

(Z posisjons-operator, hermitesk!)

$$= \sum_m \langle\phi|ZE_m|\psi_m\rangle\langle\psi_m|Z|\phi\rangle$$
$$= \sum_m \langle\phi|ZH|\psi_m\rangle\langle\psi_m|Z|\phi\rangle$$
$$= \langle\phi|ZHZ|\phi\rangle$$

Det gir

$$Q = ZHZ$$

7.12

En egenskap til δ-funksjonen:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(ax)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta(ax)}{a}\,d(ax)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta(y)}{a}\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta(x)}{a}\,dx \qquad (a>0)$$

Tilsvarende for $a<0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(-|a|x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta(-|a|x)}{-|a|}\,d(-|a|x) \qquad (-|a|x = y)$$
$$= \int_{\infty}^{-\infty}\frac{\delta(y)}{-|a|}\,dy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta(y)}{|a|}\,dy \qquad (a<0)$$

dvs. $\delta(ax) = \dfrac{\delta(x)}{|a|}$

som skulle vises