DATO 29. november 2004

AVDELING FOR :	*TEKNOLOGI OG NATURVITENSKAP*
EKSAMEN I :	*MPE400 - KVANTEFYSIKK*
VARIGHET :	*4 timer*
TILLATTE HJELPEMIDLER :	*"The Cambridge Handbook of Physics Formulas"ved Graham Woan, "Mathematical Handbook of Formulas and Tables" ved Murray R. Spiegel, kalkulator*
OPPGAVESETTET BESTÅR AV :	*5 oppgaver på 2 sider*
MERKNADER :	*Logisk framstilling og begrunnelse av svarene vektlegges.*

Oppgave I

Den kvantemekaniske dreieimpulsoperatoren er gitt ved kryssproduktet $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, der $\vec{p}$ er impulsoperatoren $-i\hbar\vec{\nabla}$.

a) Vis at i kulekoordinater (r, θ, ϕ) er dreieimpulsoperatorens z-komponent $L_3 = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial\phi}$.

b) Finn egenverdiene til operatoren L_3.

Oppgave II

For en potensialbarriere med høyde V_0 og bredde a er transmisjonskoeffisienten gitt ved

$$T = \frac{4k^2\kappa^2}{(k^2+\kappa^2)^2\sinh^2\kappa a + 4k^2\kappa^2},$$

der konstantene k og κ er gitt ved $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ og $\kappa = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$. Energien E forutsettes å ligge i intervallet $\langle 0, V_0 \rangle$.

Finn det tilsvarende uttrykket for transmisjonskoeffisienten til en partikkel med energi $E > 0$, som beveger seg gjennom en potensialbrønn med dybde V_0 og bredde a. Bevegelsen forutsettes å foregå i én dimensjon. Utenfor potensialbrønnen er den potensielle energien konstant og lik null. Benytt betegnelsene $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ og $k' = \sqrt{2m(V_0 + E)}/\hbar$.

Oppgave III

Schrödingerligningen for hydrogenatomet er separabel i kulekoordinater (r, θ, ϕ). Setter vi inn $\psi(r, \theta, \phi) = R(r)\,Y_m^l(\theta, \phi)$, der Y_m^l er egenfunksjon for dreieimpulsoperatoren L^2, finner vi at radialfunksjonen R tilfredsstiller radialligningen

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} - \frac{l(l+1)}{r^2}R\right) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}R = E\,R,$$

der $l = 0, 1, 2, \ldots$ I det følgende antar vi at $E < 0$.

a) La $\kappa = \sqrt{-2mE}/\hbar$. Vis at substitusjonen $\rho = \kappa r$ da gir radialligningen den enklere formen

$$\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho} = \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} + \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right) R.$$

b) Vi vil nå finne noen enkle løsninger av radialligningen for $l = 1$. Benytt en prøveløsning av formen $R = (A + B\rho + C\rho^2)\,\mathrm{e}^{-\rho}$, der konstantene A, B og C skal bestemmes. Vis at vi finner to løsningssett for konstantene A, B og C. Skisser de to radialfunksjonene som funksjon av ρ.

c) Hva blir de tilhørende verdier av energien E?

d) For hvilke verdier av r oppnår de to radialfunksjonnene sin største absoluttverdi? Uttrykk svaret i Bohr-radier.

Oppgave IV

a) Vis at i frielektronmodellen for metaller er Fermi-energien gitt ved

$$E_F = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{3n}{\pi}\right)^{2/3},$$

der n er antallet valenselektroner per volumenhet.

b) Vis at når temperaturen er meget lav, så er den midlere elektronenergien $\frac{3}{5}$ av Fermi-energien.

c) Ved meget lave temperaturer er elektronenes totale kinetiske energi omvendt proporsjonal med tredje roten av metallets kvadrerte volum. Vis dette.

Oppgave V

Moseleys lov kan skrives på formen $\nu^{1/2} = A\,(Z-1)$.

a) Benytt den enkle Bohr-modellen til å beregne verdien til konstanten A i Moseleys ligning for K_α- og L_α-overgangsrekkene.

b) Ved måling av K_α-linjene til en rekke elementer blev følgende eksperimentelle verdier funnet:

Fe : 1,94 Å   Co : 1,79 Å   Ni : 1,66 Å   Cu : 1,54 Å

Benytt disse tallene til å bestemme atomnummerene til de nevnte elementene.

FINIS