DATO 15. desember 2009

AVDELING FOR :	*TEKNOLOGI OG NATURVITENSKAP*
EKSAMEN I :	*BIT 370 - KVANTEMEKANIKK*
VARIGHET :	*4 timer*
TILLATTE HJELPEMIDLER :	*"Tabeller og formelsamling" ved P. T. Cappelen m.fl., "Mathemathische Formelsammlung" ved K. Rottmann, enkel kalkulator.*
OPPGAVESETTET BESTÅR AV :	*3 oppgaver på 3 sider*
MERKNADER :	*Logisk framstilling og begrunnelse av svarene vektlegges.*

Oppgave I

Partikler som befinner seg innenfor et avgrenset område vil ifølge Heisenbergs uskarphetsrelasjon ikke ha bestemt impuls, og den tilhørende bølgefunksjon vil derfor spre seg. I det følgende tar vi for oss en gaussisk bølgefunksjon.

a) En fri partikkel med masse m befinner seg i en tilstand der partikkelens posisjon x er normalfordelt. D.v.s. at

$$|\psi(x,t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\Big(-\frac{x^2}{2\,\sigma^2}\Big). \tag{1}$$

Hva er posisjonens forventningsverdi og varians? Finn posisjonens uskarphet Δx uttrykt ved σ.

b) Vi tenker oss at sannsynlighetstettheten (1) er avledet av en bølgefunksjon som har formen

$$\psi(x,t) = \frac{\mathcal{N}}{\sqrt{s}}\ \exp\Big(-\frac{x^2}{4\,s}\Big), \tag{2}$$

der størrelsen s er en funksjon av tiden, og $\mathcal{N}$ er en normeringskonstant. Vis at s må tilfredsstille differensialligningen $\dot{s} = \dfrac{i\hbar}{2m}$ for at (2) skal være løsning av schrødingerligningen for en fri partikkel.

c) Løs differensialligningen for $s(t)$ under forutsetning av at $s(t=0) = s_0$, der s_0 er reell og positiv.

d) Bestem normeringskonstanten $\mathcal{N}$ slik at $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 \mathrm{d}x = 1$. Skriv så opp det eksplisitte uttrykk for $\psi(x,t)$.

e) Hvor lang tid tar det for uskarpheten i posisjon til å vokse til dobbel verdi? Beregn denne tiden for et elektron med $\Delta x\,|_{t=0} = 10^{-10}\,$m.

Oppgave II

De kvantemekaniske operatorene kan representeres ved uendeligdimensjonale matriser. I denne oppgaven lar vi bokstavene P og Q bety matrisene

$$P = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{1} & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ \sqrt{1} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{3} & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

og

$$Q = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

a) Beregn matriseproduktene PQ og QP. Finn så matrisen som representerer kommutatoren $[P, Q]$.
b) Beregn matriseproduktene P^2 og Q^2. Hva blir den matrisen som representerer hamiltonoperatoren $\mathcal{H} = \frac{1}{2m}P^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 Q^2$?
c) Benytt resultatet (b) til å finne den harmoniske oscillators energiegenverdier. Hva blir den laveste energien den harmoniske oscillator kan ha?
d) Når operatorene representeres ved matriser, må tilstandene representeres ved søylematriser. Anta at den harmoniske oscillators tilstand er representert ved søylematrisen

$$\Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ c_1 \\ c_2 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix},$$

der alt er null nedenfor c_2. Finn forventningsverdiene til P og Q uttrykt ved de komplekse koeffisientene c_1 og c_2.
e) c_1 og c_2 er tidsavhengige størrelser. Anta at $c_1 = Ce^{-i\omega_1 t}$ og $c_2 = Ce^{-i\omega_2 t}$, der C er en reell konstant. Finn sirkelfrekvensene ω_1 og ω_2.
f) Hvordan avhenger forventningsverdiene $\langle P\rangle$ og $\langle Q\rangle$ av tiden? Vis at der finnes konstanter κ_1 og κ_2, slik at det kvadratiske uttrykket $\kappa_1\langle P\rangle^2 + \kappa_2\langle Q\rangle^2$ ikke avhenger av tiden. Skriv opp hva disse konstantene er.

Oppgave III

a) La A være en operator. Hva menes det med As (hermitisk) *adjungerte* operator $A^\dagger$?
b) Vis at egenverdiene til en hermitisk operator må være reelle.

c) Vis at egenfunksjonene som tilhører forskjellige egenverdier av en hermitisk operator, er ortogonale.
d) La A og B være to operatorer. Vis at vi har:

$$(AB)^{\dagger} = B^{\dagger} A^{\dagger}.$$

FINIS