Universitetet i Stavanger

DET TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET

EKSAMEN I: BIT370 Innføring i kvantemekanikk **DATO:** 13. desember 2011

TID FOR EKSAMEN: kl. 08.30-11.30 (3 timer)

TILLATTE HJELPEMIDDEL: Bestemt, enkel kalkulator (kode C)
Valgfri standard formelsamling
(f. eks. Rottmanns eller Knutsens)

OPPGAVESETTET BESTÅR AV 3 OPPGAVER, PÅ 3 SIDER INKL. DENNE FORSIDA

MERKNADER: —

OPPGITT:

$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi \qquad \sin y = \frac{1}{2i}\left(e^{iy} - e^{-iy}\right)$

$\psi_{nlm_l}(r,\theta,\phi) = R_{nl}(r)Y_l^{m_l}(\theta,\phi)\ , \qquad E = -\frac{\mu e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 2\hbar^2}\frac{1}{n^2} = -13.6\ \text{eV}\ \frac{1}{n^2}$ (H-atom)

$n = 1, 2, 3, \ldots, \qquad l \le n-1$ (H-atom)

$m_j = -j, -j+1, \ldots, 0, \ldots j-1, j$ (z-komponenter generelt, også for $j \to l$ og $j \to s$)

$j = |l-s|, |l-s|+1, \ldots, l+s-1, l+s$ (totaldreieimpuls)

$L_\pm = \hbar e^{\pm i\phi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$

$S_\pm = S_x \pm iS_y\ , \qquad S_i = \frac{1}{2}\hbar\sigma_i \qquad (i = x, y, z)$

$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad |\uparrow> \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\downarrow> \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$P = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\ , \qquad X = x$

$|\leftarrow> \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

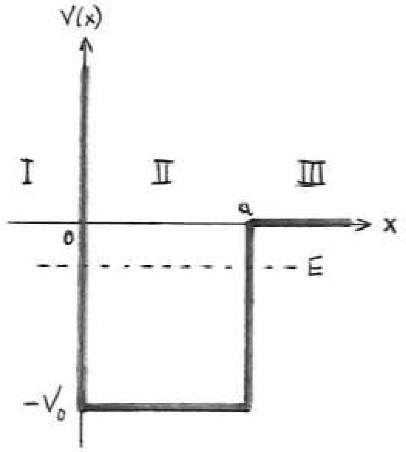
$(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = x_1^* y_1 + x_2^* y_2 + \ldots + x_n^* y_n$

$P = |< \text{f}|\text{i} >|^2$ (i for begynnelsestilstand, f for sluttilstand)

<u>Oppgave 1</u>

En partikkel med energi $E \leq 0$ og masse m er i en bundet tilstand i den "halvuendelige" firkantbrønnen med lengde a, vist i figuren, der

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \quad \text{(I)} \\ -V_0 \ (V_0 > 0) & 0 \leq x \leq a \quad \text{(II)} \\ 0 & x > a \quad \text{(III)} \end{cases}$$



Du får oppgitt at bølgefunksjonene i områdene I, II og III er gitt ved

$$\psi_{\mathrm{I}} = 0$$

$$\psi_{\mathrm{II}} = A_2 e^{ik_2 x} + B_2 e^{-ik_2 x} \ , \qquad k_2 = \frac{\sqrt{2m(V_0 + E)}}{\hbar}$$

$$\psi_{\mathrm{III}} = A_3 e^{k_3 x} + B_3 e^{-k_3 x} \ , \qquad k_3 = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}$$

a) Vis ved innsetting i den tidsuavhengige Schrödingerlikninga at ψ_{II} er en gyldig løsning i område II.

b) Bruk kontinuitetskravet til ψ ved grensen mellom områdene I og II til å eliminere en av integrasjonskonstantene i ψ_{II}. Og bruk et fysisk krav til ψ for $x \to \infty$ i område III til å bestemme en annen i ψ_{III}. Vis regninga.

c) Bruk kontinuitetskravene til ψ og $d\psi/dx$ ved grensen mellom områdene II og III til å vise, ved divisjon, at de tillatte energinivåene er bestemt av

$$\tan\left(\frac{\sqrt{2m(V_0 + E)}}{\hbar} a\right) + \sqrt{\frac{V_0 + E}{-E}} = 0$$

d) I grensen $E \to 0_-$ har uttrykket den asymptotiske formen (det skal du ikke vise)

$$\tan\left(\frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar} a\right) \sim -\sqrt{\frac{V_0}{|E|}}$$

Forklar hvorfor sammenhengen mellom V_0 og a i grensen $E \to 0_-$ altså er gitt ved[1]

$$\sqrt{2mV_0 a^2} = \hbar\pi\left(n + \frac{1}{2}\right) \ , \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

---

[1]Grensetilnærmelsen $E \to 0_-$ finner sted ved at V blir *grunnere*, dvs. V_0 *avtar*. Argumentet til $\tan$ vil da nærme seg singulariteten *ovenfra*, slik at minustegnet i likninga ovenfor er OK!

Oppgave 2

Rombølgefunksjonsdelen av et hydrogenatoms tilstand er gitt ved kvantetallene (n, l, m_l). Hvis den sfæriske harmoniske, $Y_l^{m_l}$, er kjent for en av m_l-verdiene ved gitt l, så kan uttrykkene for de andre mulige m_l-verdiene finnes ved bruk av stigeoperatorer. Det samme er tilfelle for spinndelen av bølgefunksjonen, der stigeoperatorer svitsjer mellom m_s-verdiene ved $s = 1/2$.

a) Hvis elektronet er i en tilstand med $l = 1$, hva er da den lavest mulige verdien til hovedkvantetallet n? Og hvilke mulige verdier kan elektronets totale dreieimpulskvantetall j da ha?

b) Bruk stigeoperatoren L_+ til å vise at Y_l^l, dvs. den sfæriske harmoniske $Y_l^{m_l}$ med $m_l = l$, er gitt ved (bortsett fra en normaliseringsfaktor som du ikke skal bestemme her):

$$Y_l^l(\theta, \phi) = (\sin\theta)^l e^{il\phi}$$

c) Finn et matriseuttrykk for S_+, stigeoperatoren for $s = 1/2$. Vis ved regning at $S_+| \downarrow> \propto | \uparrow>$, mens $S_+| \uparrow>= 0$.

d) For Coulombpotensialet i hydrogenatomet avhenger energien bare av hovedkvantetallet n. Er dette et generelt trekk ved sfærisk symmetriske potensialer?

Oppgave 3

Noen raske spørsmål og regninger:

a) Hva er grunnen til at hermiteske operatorer $(A^\dagger = A)$ er av stor betydning i kvantemekanikk? Og hva er generelt $(AB)^\dagger$ uttrykt ved $A^\dagger$ og $B^\dagger$ (nok å skrive det, behøves ikke utledet)?

b) Regn ut kommutatoren $[P, X]$.

c) Hva er grunnen til at vi kan beskrive spinnet i en vilkårlig retning som en lineærkombinasjon av spinn opp og ned i z-retning?

d) Et elektron er opprinnelig i tilstanden $| \uparrow>$, dvs. med $m_s = +1/2$ i z-retning. Så måler vi spinnet langs x-aksen. Hva er sannsynligheten for å finne at elektronspinnet peker i $-x$-retning, dvs. at det er i tilstanden $| \leftarrow>$?

e) Regn ut normaliseringskonstanten c for vektoren $\boldsymbol{x} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2i \end{pmatrix}$.

– Fortsatt god jul –