EKSAMEN I BIT370 INNFØRING I KVANTEMEKANIKK 13/12-2011

KORTFATTET LØSNINGSFORSLAG

1.

a)

$$\psi_{II} = A_2 e^{ik_2x} + B_2 e^{-ik_2x}, \qquad k_2 = \frac{\sqrt{2m(V_0+E)}}{\hbar}$$

$$\frac{d\psi_{II}}{dx} = ik_2A_2e^{ik_2x} - ik_2B_2e^{-ik_2x}$$

$$\frac{d^2\psi_{II}}{dx^2} = -k_2^2A_2e^{ik_2x} - k_2^2B_2e^{-ik_2x} = -k_2^2\psi_{II}$$

Innsatt i SL:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(-k_2^2)\psi_{II} + (-V_0)\psi_{II} = E\psi_{II}$$

$$\frac{\hbar^2}{2m}k_2^2 = V_0+E$$

$$k_2 = \frac{\sqrt{2m(V_0+E)}}{\hbar}$$

Konsistens, dvs. gyldig løsning!

b)

Kontinuitet I – II:

$$0 = A_2e^0 + B_2e^{-0}$$

$$\underline{\underline{A_2 = -B_2}}$$

For område III, i grensen $x \to \infty$, må bølgefunksjonen være endelig

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{A_3 = 0}}$$

c)

Kontinuitet II – III:

$$\psi_{II} = A_2(e^{ik_2x} - e^{-ik_2x}) = 2iA_2\sin(k_2x)$$

$$\frac{d\psi_{II}}{dx} = 2ik_2A_2\cos(k_2x)$$

$$2iA_2\sin(k_2a) = B_3e^{-k_3a} \quad (\psi \text{ kontinuerlig})$$

$$2ik_2A_2\cos(k_2a) = -k_3B_3e^{-k_3a} \quad \left(\frac{d\psi}{dx} \text{ —"— }\right)$$

./.

Divisjon gir

$$\frac{1}{k_2}\tan(k_2 a) = -\frac{1}{k_3}$$

$$\tan\left(\frac{\sqrt{2m(V_0+E)}}{\hbar}a\right) + \sqrt{\frac{V_0+E}{-E}} = 0$$

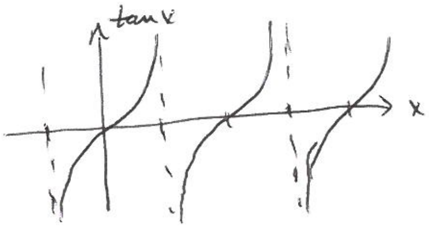
som skulle vises

d)

Asymptotisk for $E \to 0_-$:

$$\tan\left(\frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar}a\right) \sim -\sqrt{\frac{V_0}{|E|}} \to -\infty$$

Uendeligheter i tan finner sted når argumentet er $\frac{\pi}{2} + n\pi$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Men en slik grenseovergang fram kommer her ved at V_0 avtar (dvs. potensialbrønnen blir grunnere), dvs. argumentverdien nærmer seg singulariteten ovenfra. Fortegnet stemmer altså; vi har:



$$\sqrt{2mV_0a^2} = \hbar\pi\left(\tfrac{1}{2}+n\right)$$

som skulle vises

For en gitt a-verdien, gir dette V_0-verdiene som tilsvarer $E=0$.

2.

a) Ut fra regelen $l \leq n-1$ (oppgitt men strengt tatt overflødig) har vi $n_{min} = 2$ for å få $l = 1$.

Og fra kombinasjonsregelen $j \in \{|l-s|, |l-s+1|, \ldots, l+s\}$ finner vi

$$j \in \left\{\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}\right\}$$

b) Sjekk om det oppgitte uttrykket oppfyller $L_+Y_l^l = 0$:

$$\hbar e^{i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\left((\sin\theta)^l e^{il\phi}\right)$$

$$= \hbar e^{i\phi}\left(l(\sin\theta)^{l-1}\cos\theta + (\sin\theta)^l i\cot\theta(il)\right)e^{il\phi}$$

$$= \hbar e^{i\phi}\underbrace{\left(l\frac{\cos\theta}{\sin\theta} - l\cot\theta\right)}_{=0\,!}(\sin\theta)^l e^{il\phi}$$

dvs. uttrykket for Y_l^l er løsning

c)

$$S_+ = S_x + i S_y$$
$$= \frac{1}{2}\hbar(\sigma_x + i\sigma_y)$$
$$= \frac{1}{2}\hbar\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\hbar\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right)$$
$$= \hbar\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

$\leftarrow$ matriseutt nyttet

$$S_+|\uparrow\rangle = \hbar\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 0$$
$$S_+|\downarrow\rangle = \hbar\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \hbar\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \hbar|\uparrow\rangle$$

som skulle vises!

d) Som oppgitt i læreboka side 139:
For andre sfærisk symmetriske potensialer enn Coulombpotensialet ($V(r) \propto 1/r$) vil energien avhenge ikke bare av hovedkvantetallet n, men også av dreieimpulskvantetallet l.

3.

a) Hermitske operatorer har reelle egenverdier, og er derfor egnet til å representere observable fysiske størrelser.

Og vi har $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$.

b) Ta med bølgefunksjonen i regninga:

$$[P, X]\psi = -i\hbar\left[\frac{\partial}{\partial x}, x\right]\psi$$
$$= -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x}(x\psi) - x\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi$$
$$= -i\hbar\left(\psi + x\frac{\partial\psi}{\partial x} - x\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$$
$$= -i\hbar\psi$$

dvs.

$$[P, X] = -i\hbar$$

c) I det todimensjonale vektorrommet for spinn, danner $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ og $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et ortonormalt basissett. Det kan derfor brukes til å uttrykke spinn i $\pm x$ og $\pm y$-retninger som lineærkombinasjoner av tilstandene for spinn opp og ned i z-retning. (Side 173.)

d) Den etterspurte sannsynligheten er: Side 174/175

$$\mathbb{P} = |\langle\leftarrow|\uparrow\rangle|^2$$
$$= \left|\tfrac{1}{\sqrt{2}}(1\ \ -1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right|^2$$
$$= \left|\tfrac{1}{\sqrt{2}}(1+0)\right|^2$$
$$= \underline{\underline{\tfrac{1}{2}}}$$

e)
$$\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle = |c|^2 (1\ \ 3\ \ -2i)\begin{pmatrix}1\\3\\2i\end{pmatrix}$$
$$= |c|^2 (1+9+4) = 1$$

$\Rightarrow$ normaliseringskonstanten er

$$\underline{\underline{c = 1/\sqrt{14}}}$$