DATO 17. februar 2010

AVDELING FOR :	*TEKNOLOGI OG NATURVITENSKAP*
EKSAMEN I :	*BIT 370 - KVANTEMEKANIKK*
VARIGHET :	*4 timer*
TILLATTE HJELPEMIDLER :	*"Tabeller og formelsamling" ved P. T. Cappelen m.fl., "Mathemathische Formelsammlung" ved K. Rottmann, enkel kalkulator.*
OPPGAVESETTET BESTÅR AV :	*3 oppgaver på 3 sider*
MERKNADER :	*Logisk framstilling og begrunnelse av svarene vektlegges.*

Oppgave I

La $|\psi\rangle$ og $|\phi\rangle$ være tilstander som er løsning av den tidsavhengige schrødingerligningen; d.v.s. at

$$i\hbar\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi\rangle = \mathcal{H}|\psi\rangle \quad \text{og} \quad i\hbar\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\phi\rangle = \mathcal{H}|\phi\rangle.$$

a) Benytt formelen $\langle\psi|\phi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,t)\phi(x,t)\,\mathrm{d}x$ til å vise at

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\psi|\phi\rangle = \frac{1}{i\hbar}\Big(\langle\psi|\mathcal{H}|\phi\rangle - \langle\psi|\mathcal{H}^\dagger|\phi\rangle\Big).$$

Når hamiltonoperatoren er hermitisk, medfører dette at skalarproduktet $\langle\psi|\phi\rangle$ er tidsuavhengig.

La $\langle A\rangle$ stå for forventningsverdien til operatoren A når systemet er i tilstanden $|\psi\rangle$. Da er

$$\langle A\rangle = \frac{\langle\psi|A|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}.$$

I det nedenforstående forutsettes det at $|\psi\rangle$ er løsning av den tidsavhengige schrødingerligningen, og at hamiltonoperatoren $\mathcal{H}$ er hermitisk.

b) Vis at

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle A\rangle = \frac{1}{i\hbar}\frac{\langle\psi|[A,\mathcal{H}]|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}.$$

La $\mathcal{H} = \frac{1}{2m}P^2 + \frac{1}{2}m\omega^2Q^2$, der $[P,Q] = -i\hbar$.

c) Beregn kommutatorene $[\mathcal{H},P]$ og $[\mathcal{H},Q]$.

d) Vis at forventningsverdiene $\langle P\rangle$ og $\langle Q\rangle$ tilfredsstiller differensialligningene

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle P\rangle = -m\omega^2\langle Q\rangle \quad \text{og} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle Q\rangle = \frac{1}{m}\langle P\rangle.$$

e) I et koordinatsystem der $\langle P\rangle$ settes av langs den ene aksen, og $\langle Q\rangle$ langs den andre, vil punktet $(\langle P\rangle,\langle Q\rangle)$ beskrive en lukket kurve. Tegn et diagram som viser denne kurven. I hvilken retning beveger punktet $(\langle P\rangle,\langle Q\rangle)$ seg?

La $|\psi_0\rangle$, $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$, ... være den harmoniske oscillators normaliserte egenvektorer. Da er $\mathcal{H}|\psi_n\rangle = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega|\psi_n\rangle$ for $n = 0, 1, 2, \ldots$ La videre

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, Q + \frac{i}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\, P \quad \text{og} \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, Q - \frac{i}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\, P.$$

Anta nå at oscillatoren ved tidspunkt $t = 0$ befinner seg i tilstanden

$$|\psi\rangle = \frac{|\psi_0\rangle + |\psi_1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

f) Benytt formelen $|\psi_{n+1}\rangle = \dfrac{a^\dagger}{\sqrt{n+1}}|\psi_n\rangle$ til å finne forventningsverdiene til impuls og posisjon ved tidspunktet $t = 0$.
g) $\langle P\rangle$ og $\langle Q\rangle$ er tidsavhengige størrelser. Hvilke maksimalverdier har de? D.v.s. finn $\langle P\rangle_{\max}$ og $\langle Q\rangle_{\max}$ under forutsetning av at $|\psi\rangle$ er den som er gitt ovenfor.

Oppgave II

Paulimatrisene σ_1, σ_2, σ_3 er gitt ved de eksplisitte yttrykkene

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

De benyttes til å beskrive elektronets indre dreieimpuls, ved at man lar de 3 operatorene

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_1, \quad S_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_2, \quad S_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_3$$

representere elektronets indre dreieimpuls (også kalt elektron spinn) om x-aksen, y-aksen og z-aksen. De to spinntilstandene $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ skrives gjerne som $|\uparrow\rangle$ og $|\downarrow\rangle$.
a) Hvilke egenverdier har de 3 spinnoperatorene S_x, S_y, S_z?
b) Hvilke egenverdier har operatoren $S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$?
Dersom vi ønsker å beskrive et system som består av 2 elektroner, trenger vi 2 sett spinnoperatorer, nemlig 1 sett for det ene elektronet og et annet sett for det andre, som i alt gir de 6 spinnoperatorene

$$S_x^{(1)},\ S_y^{(1)},\ S_z^{(1)},\ S_x^{(2)},\ S_y^{(2)},\ S_z^{(2)}.$$

De to elektronenes spinntilstander beskrives da gjerne ved hjelp av de 4 basistilstandene

$$|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle\,,\ |\uparrow\rangle|\downarrow\rangle\,,\ |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle\,,\ |\downarrow\rangle|\downarrow\rangle\,,$$

der venstre tilstand i hvert par tilhører det ene elektronet (nummer 1) og høyre tilstand det andre elektronet (nummer 2). De tre operatorene $S_x^{(1)}$, $S_y^{(1)}$, $S_z^{(1)}$ virker da kun på venstre tilstand i et slikt par og ikke på høyre tilstand. $S_x^{(2)}$, $S_y^{(2)}$, $S_z^{(2)}$ virker i sin tur kun på høyre tilstand i paret og ikke på venstre tilstand.

De to elektronenes *totale spinn* defineres da ved de tre operatorene man får, ved å addere de to settene spinnoperatorer på samme måten som man er vant med å addere vektorer komponentvis. Altså slik:

$$S_x = S_x^{(1)} + S_x^{(2)}, \quad S_y = S_y^{(1)} + S_y^{(2)}, \quad S_z = S_z^{(1)} + S_z^{(2)}.$$

c) Vis at de to to-elektrontilstandene $|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle$ og $|\downarrow\rangle|\downarrow\rangle$ er egentilstander for S_z. Hva er de tilhørende egenverdier?
d) Vis at de to tilstandene nevnt i (c) også er egentilstander for operatoren $S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$. Hva er egenverdien?
e) Vis at tilstandene $|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle$ og $|\downarrow\rangle|\uparrow\rangle$ likeledes er egentilstander for S_z, men ikke for S^2.
f) Finn lineærkombinasjoner av formen $|\psi\rangle = \alpha|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle|\uparrow\rangle$, slik at $|\psi\rangle$ er egentilstand for S^2. Hvilke egenverdier finner du?

Oppgave III

Ifølge den spesielle relativitetsteorien varierer en partikkels masse m med partikkelens hastighet v etter formelen

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Her kalles størrelsen m_0 partikkelens hvilemasse. Partikkelens impuls og energi er da gitt ved formlene

$$p = m\,v \quad \text{og} \quad E = m\,c^2.$$

a) Dersom relativistiske partikler beskrives som materiebølger med bølgefunksjon av formen $\psi = A\,e^{i\,(kx-\omega t)}$, hvilket uttrykk finner du for bølgens fasehastighet v_f?
b) Hva finner du for bølgenes gruppehastighet v_g?

FINIS