## DETALJ: UTTRYKKET FOR PLANCKS STRÅLINGSLOV

Antakelser:

$*$ $E = 0, h\nu, 2h\nu, \dots$ (diskret energifordeling)

$*$ $P(E) = \frac{1}{kT} e^{-E/kT}$ (Boltzmannfordelingen)

Midlere energi for termodynamisk likevekt:

$$\bar{E} = \sum_{E=0,h\nu,\dots} E\,P(E) \Big/ \sum_{E=0,h\nu,\dots} P(E)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nh\nu}{kT} e^{-nh\nu/kT} \Big/ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{kT} e^{-nh\nu/kT} \qquad \left(\text{sett } \frac{h\nu}{kT} = x\right)$$

$$= kT\left(\sum_{n=0}^{\infty} nx\, e^{-nx}\right) \Big/ \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}\right)$$

Altså geometriske rekker i teller og nevner!

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-nx} = -\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$$ (bytt rekkefølge av sum og derivasjon)

$$= \frac{d}{dx} \frac{1}{x-1} = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

Innsett:

$$\bar{E} = -kTx \frac{1-x}{(x-1)^2}$$

$$= -kTx \frac{1}{1-x}$$

$$= -kT \frac{h\nu}{kT} \frac{1}{1 - e^{h\nu/kT}}$$

$$= \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

Multiplisert med uttrykket for $n(\nu)\,d\nu$ gir dette Plancks svart-legeme-spektrum:

$$\boxed{\rho(\nu)\,d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}}$$