Formler og uttrykk

I løsningene blir formeluttrykkene fra lærebøkene ofte referert til uten kommentarer. Disse uttrykkene er samlet her, med en notasjon stort sett som i Finnemore og Franzinis lærebok. Et par viktige avvik i notasjon mellom forskjellige lærebøker er også nevnt. Vektorer er angitt med **fete** typer. Noen steder vil da samme symbol med vanlige typer stå for vektorens absoluttverdi,[1] uten at det blir eksplisitt definert.

Gassligningen blir skrevet på en form der bare den universelle molare gasskonstanten R_0 opptrer. Stoffvariasjoner spesifiseres istedet ved molmassen M, som i tallverdi er omtrent lik antall nukleoner i molekylene, eller gjennomsnittsverdien hvis gassen er en blanding. Dette gir en bedre fysisk forståelse enn om egne gasskonstanter for hvert enkelt stoff brukes.

Gaugetrykk (aktuelt lokalt, ikke standard, atmosfæretrykk skal brukes):

$$p_{\text{g}} = p_{\text{abs}} - p_{\text{atm}}$$

Gassligning, hvor $Z = Z(p, T)$ er kompressibilitetsfaktoren, lik 1 for en ideell gass, og M er molmassen:

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho} &= p\frac{v}{M} = \frac{ZR_0T}{M} \\ \gamma &= \rho g = \frac{gpM}{ZR_0T} \end{aligned}$$

Adiabatisk (isentropisk) prosess, ideell gass:

$$pv^\kappa = \text{konstant} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{T_2}{T_1} = (\frac{v_1}{v_2})^{\kappa-1} = (\frac{\rho_2}{\rho_1})^{\kappa-1} = (\frac{p_2}{p_1})^{(\kappa-1)/\kappa}$$

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} \qquad , \qquad \kappa_{\text{luft}} \approx \frac{7}{5} \qquad \text{(to-atomig gass)}$$

U.S. standardatmosfære, troposfæredelen, for høyde $z < 11019$ m:

$$\begin{aligned} T &= T_0 - Bz \\ T_0 &= 15\,^{\text{o}}\text{C} \\ B &= 0.006489\,^{\text{o}}\text{C/m} \end{aligned}$$

[Absolutt/dynamisk] viskositet(skoeffisient) μ, og kinematisk viskositet ν, definert ved skjærspenning τ og hastighetsgradient du/dy:

$$\mu = \frac{\tau}{du/dy}\,, \qquad \nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Fluidstatikkens grunnligning:

$$-\nabla p + \rho \boldsymbol{g} \ \ (+ \text{ andre felt- eller treghetskrefter}) = 0$$

Trykkrelasjoner ved konstant tetthet (vertikalt rettet z-akse):

$$p - p_0 = -\rho g(z - z_0)$$

[1] Viktig unntak: $\boldsymbol{u}$ er en lokal hastighetsvektor, men u er dens x-komponent!

$$F_h = \rho g h_c A \ , \qquad y_p = y_c + \frac{I_c}{y_c A} \qquad (h = y\text{'s vertikalkomponent}^2)$$

$$\begin{aligned} F_v &= \text{vekt av væske rett opp til overflaten} \qquad \text{(total trykkraft i krum flate)} \\ F_v &= \text{vekt av fortrengt væskemengde} \qquad \text{(oppdrift)} \end{aligned}$$

Ved oppgaver som angår trykk i væske blir vanligvis omgivende atmosfæretrykk approksimert som høyde-uavhengig.

Flatetreghetsmomenter om flatesenter:

$$\begin{aligned} I_c &= \frac{1}{12} b h^3 \qquad \text{(rektangel)} \\ I_c &= \frac{1}{36} b h^3 \ , \qquad h'_c \ = \ \frac{1}{3} h \qquad \text{(trekant, } h'_c = \text{høyde over vilkårlig side)} \\ I_c &= \frac{1}{4} \pi R^4 \qquad \text{(sirkel)} \\ I_c &= (\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}) R^4 \ = \ 0.10976\ldots R^4 \ , \qquad h'_c \ = \ \frac{4R}{3\pi} \qquad \text{(halvsirkel)} \end{aligned}$$

Arkimedes' lov:

$$\begin{aligned} \text{Oppdrift} &= \text{Vekt av fortrengt væskemengde} \\ (&= \Sigma\,\text{(krefter nedenfra)} - \Sigma\,\text{(krefter ovenfra)} \ \ ) \end{aligned}$$

Skråvinkel θ for flate med konstant trykk ved akselerasjon i xz-planet:

$$\frac{dz}{dx} \ = \ -\frac{a_x}{a_z + g} \ = \ \tan\theta$$

Kinematikk og grunnleggende hydrodynamikk:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= (u, v, w) \ = \ u\hat{\boldsymbol{i}} + v\hat{\boldsymbol{j}} + w\hat{\boldsymbol{k}} \\ \nabla &= \hat{\boldsymbol{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\boldsymbol{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\boldsymbol{k}}\frac{\partial}{\partial z} \\ \boldsymbol{a} &= \frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} \ = \ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{u} \\ \frac{dx}{u} &= \frac{dy}{v} \ = \ \frac{dz}{w} \qquad \text{(strømlinjeligninger)} \\ \boldsymbol{\xi} &= \nabla\times\boldsymbol{u} \qquad \text{(virvling)} \\ \Gamma &= \oint_L \boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{L} \qquad \text{(sirkulasjon)} \\ \boldsymbol{u} &= -\nabla\phi \qquad (\phi \text{ hastighetspotensial, for } \boldsymbol{\xi} = 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u}) &= 0 \qquad \text{(kontinuitetsligning)} \\ \nabla\cdot\boldsymbol{u} \ = \ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \qquad \text{(kontinuitetsligning, inkompressibel stasjonær strøm)} \\ u &= \frac{\partial\psi}{\partial y} \ , \ \ v \ = \ -\frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad (\psi \text{ strømfunksjon, forutsatt kontinuitet}) \end{aligned}$$

[2] I noen lærebøker er y_p og h_p definert negativ, med nullpunkt i flatesenteret.

$$\nabla^2\phi \;=\; \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \;=\; 0 \qquad \text{(Laplaceligningen)}$$

I sylindriske polarkoordinater (som gir plane polarkoordinater hvis u_z og z ses bort fra):

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u} &= (u_r, u_t) \;=\; u_r\hat{\boldsymbol{e}}_r + u_t\hat{\boldsymbol{e}}_\theta + u_z\hat{\boldsymbol{e}}_z \\
\nabla &= \hat{\boldsymbol{e}}_r\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{e}}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{\boldsymbol{e}}_z\frac{\partial}{\partial z}
\end{aligned}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} \;=\; \frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_t}{\partial\theta}+\frac{\partial u_z}{\partial z} \;=\; 0 \qquad \text{(kontinuitetsligning, inkompressibel stasjonær strøm)}$$

$$(\boldsymbol{\xi})_z \;=\; \frac{\partial u_t}{\partial r}+\frac{u_t}{r}-\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} \qquad \text{(virvling)}$$

I sfæriske polarkoordinater:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u} &= (u_r, u_t) \;=\; u_r\hat{\boldsymbol{e}}_r + u_\theta\hat{\boldsymbol{e}}_\theta + u_\phi\hat{\boldsymbol{e}}_\phi \\
\nabla &= \hat{\boldsymbol{e}}_r\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{e}}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{\boldsymbol{e}}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} \\
\nabla\cdot\boldsymbol{u} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{2u_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\cot\theta\frac{u_\theta}{r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial\phi} \;=\; 0 \\
& \text{(kontinuitetsligning, inkompressibel stasjonær strøm)}
\end{aligned}$$

Middelhastighet V, volumetrisk strømrate Q, energi- og impulskorreksjonsfaktorer α og β når normalhastighet u varierer over et tverrsnitt A:

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{A}\int_A u\,dA \;=\; \frac{Q}{A} \\
\alpha &= \frac{1}{AV^3}\int_A u^3\,dA \\
\beta &= \frac{1}{AV^2}\int_A u^2\,dA
\end{aligned}$$

"Makroskopisk" kontinuitetsligning, stasjonært udeformerbart kontrollvolum:

$$\begin{aligned}
\sum(\rho Q)^{\text{inn}} - \sum(\rho Q)^{\text{ut}} &= \cancel{V}\,\frac{\partial\overline{\rho}_{\text{CV}}}{\partial t} \\
(&= 0 \text{ for stasjonær strøm })
\end{aligned}$$

Energiligningen ("Bernoullis ligning med maskin- og tapsledd"):

$$H_1 + h_M \;=\; H_2 + h_L$$

$$\begin{aligned}
H &= \frac{p}{\rho g}+\frac{1}{2g}V^2+z \\
h_L &= (I_2 - I_1) - Q_H \\
h_M &= h_P \;>\; 0 \qquad \text{(pumpe)} \\
h_M &= h_t \;<\; 0 \qquad \text{(turbin)}
\end{aligned}$$

Stagnasjonstrykk p_0 ved gitt trykk og temperatur:

$$p_0 = p + \frac{1}{2}\rho V^2$$

Effekt assosiert med "head"-bidrag h, der η er innretningens effektivitet:

$$P = \eta\, \rho g Q h \qquad \text{(turbin)}$$

$$P = \frac{1}{\eta}\, \rho g Q h \qquad \text{(pumpe)}$$

Impulssatsen for stasjonær strøm:

$$\begin{aligned}
\sum \boldsymbol{F} &= \sum(\beta\rho Q\boldsymbol{V})^{\text{ut}} - \sum(\beta\rho Q\boldsymbol{V})^{\text{inn}} \\
\sum \boldsymbol{F} &= \rho Q(\boldsymbol{V}^{\text{ut}} - \boldsymbol{V}^{\text{inn}}) \qquad \text{(1 innløp, 1 utløp, } \beta \to 1\text{)} \\
\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{V} - \boldsymbol{u} \qquad (\boldsymbol{u} = \text{bladhastighet})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{V}^{\text{ut}} - \boldsymbol{V}^{\text{inn}} &= \boldsymbol{v}^{\text{ut}} - \boldsymbol{v}^{\text{inn}} \\
Q &= A_1\,|\boldsymbol{v}_1| \qquad \text{(enkelt blad)} \\
Q = Q' &= A_1\,|\boldsymbol{V}_1| \qquad \text{(full turbinkrans)}
\end{aligned}$$

Substansielt derivert:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla = u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$$

Navier-Stokes' ligning for en inkompressibel fluid:

$$\begin{aligned}
\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} &= -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{g} + \nu\nabla^2\boldsymbol{u} \\
\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + 0 + \nu(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}) \\
\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + 0 + \nu(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}) \\
\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2})
\end{aligned}$$

Reynoldstall Re, Froudetall Fr og Machtall Ma:

$$\begin{aligned}
\text{Re} &= \frac{\rho V L}{\mu} \propto \frac{\text{treghetskrefter}}{\text{viskøse krefter}} \\
\text{Fr} &= \frac{V}{\sqrt{gL}} \propto \sqrt{\frac{\text{treghetskrefter}}{\text{tyngdekrefter}}} \\
\text{Ma} &= \frac{V}{c} \propto \sqrt{\frac{\text{treghetskrefter}}{\text{elastiske krefter}}}
\end{aligned}$$

Π-teoremet: Hvis

$$\begin{aligned} n &= \#\text{ variable med dimensjon} \\ k &= \text{reduksjonstallet} \\ m &= \#\text{ fundamentale dimensjoner} \end{aligned}$$

så er

$$\begin{aligned} n-k &= \#\text{ dimensjonsløse }\Pi\text{-grupper} \\ k &\leq m \qquad \text{(som oftest } k=m \text{ i typiske \textit{regneoppgaver})} \end{aligned}$$

Omslagspunkt mellom laminær og turbulent strøm:

$$\mathrm{Re}_{\mathrm{krit}} \approx 2300$$

Hydraulisk radius R_h, med A og P henholdsvis strømareal og lengden av "fuktet periferi":

$$R_h = \frac{A}{P}$$

Darcy-Weisbachs ligning, definisjon av Moodys friksjonsfaktor f:

$$h_L = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

Friksjonsfaktor for laminær strøm i sylindrisk rør:

$$f = \frac{64}{\mathrm{Re}}$$

Innløpslengde L_e:

$$\begin{aligned} L_e &\approx 0.058\,\mathrm{Re}\,D \qquad \text{(laminær strøm)} \\ L_e &\approx 4.4(\mathrm{Re})^{1/6}D \qquad \text{(turbulent strøm)} \end{aligned}$$

Hastighetsskala u_* og tykkelse δ_l for viskøst subsjikt, definert ved skjærspenning τ_0 ved vegg:

$$\begin{aligned} u_* &= \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = V\sqrt{\frac{f}{8}} \\ \delta_l &= \frac{14.14D}{\mathrm{Re}\sqrt{f}} \end{aligned}$$

Strømbetingelser for "glatt" og "ru" rør, med ekvivalent ruhetshøyde e:

$$\begin{aligned} \delta_l &> e \qquad \text{"hydraulisk glatt" rør} \\ \delta_l &< \frac{1}{14}e \qquad \text{"helt ru" rør} \end{aligned}$$

Turbulent hastighetsfordeling for rørstrøm, med avledede α- og β-faktorer:

$$u = (1+1.326\sqrt{f})V - 2.04\sqrt{f}V\log\frac{R}{R-r}$$

$$\begin{aligned} \frac{V}{u_{\max}} &= \frac{1}{1+1.326\sqrt{f}} && \text{(rørfaktoren)} \\ \alpha &= 1+2.7f \\ \beta &= 1+0.98f \end{aligned}$$

Friksjonsfaktor for turbulent strøm i sylindrisk rør:

$$\begin{aligned} f &= \frac{0.316}{\mathrm{Re}^{1/4}} && \text{(Blasius)} \\ \frac{1}{\sqrt{f}} &= -2\log\left(\frac{e/D}{3.7}+\frac{2.51}{\mathrm{Re}\sqrt{f}}\right) && \text{(Colebrook)} \\ \frac{1}{\sqrt{f}} &= -1.8\log\left[\left(\frac{e/D}{3.7}\right)^{1.11}+\frac{6.9}{\mathrm{Re}}\right] && \text{(Haaland)} \end{aligned}$$

Kategorisering av løsningsprosedyre:

Type	Finn	For gitt	Iterasjon?	Startverdi
1. Head-tap	h_L	D, Q, g, L, e, ν	Nei	–
2. Strømberegning	Q (V)	D, h_L, g, L, e, ν	Ja	Asymptotisk
3. Dimensjonering	D	Q, h_L, g, L, e, ν	Ja	Midt i

Head-tap h' ved "små" lokale tap, generell form, k en koeffisient:

$$h' = k\frac{V^2}{2g}$$

– Særskilt form for h' ved tverrsnittsøkning:[3]

$$h' = k\frac{1}{2g}(V_1 - V_2)^2 \qquad (k \approx 1 \text{ ved plutselig sprang})$$

Konvensjoner

Flere konvensjoner for definisjoner og formeluttrykk forekommer i lærebøkene. Valg måtte gjøres for å få en entydig framstilling i denne samlingen. Noen slike:

- Notasjonen følger stort sett Finnemore og Franzinis lærebok. Hastighetsfeltvektoren betegnes med $\boldsymbol{u}$, mens $\boldsymbol{V}$ er brukt for midlere hastighet.
- z-aksen peker pr. definisjon vertikalt, slik at xy-planet tilsvarer horisontalplanet.
- Energiligningen / Bernoullis ligning er brukt på "head"-form, dvs. med energi pr. *vekt*enhet. Dette er et avvik fra vanlige konvensjoner i fysisk litteratur. Valget er motivert av at med "head"-formalisme tilsvarer normalatmosfæretrykkenergien omtrent 10 m vannhøydeforskjell, et energimål som antas å være praktisk håndgripelig.
- Et "maskinledd" h_M er innført på venstre side i energiligningen. I noen lærebøker gjenfinnes dette på høyre side, som "akslingsarbeid" h_s med positivt fortegn. Dermed blir $h_s < 0$ for tilført arbeid.
- Froudetallet forekommer også på en annen form i noen lærebøker, som kvadratet av den størrelsen som er brukt i denne samlingen.

[3]Se også oppgave F.3.

- Ved Buckinghams metode i dimensjonsanalyse brukes også en annen notasjon for antall fundamentale, gjentatte og dimensjonsløse variable. Symbolene er slik (samme bokstav betyr forskjellige ting) at en omregning fra en representasjon til den andre kan i praksis være pinlig stressende.
- Av typografiske grunner er to-bokstav-symbolene for de vanlige dimensjonsløse gruppene brukt.
- Verdien av $\mathrm{Re}_{\mathrm{krit}}$ oppgis litt forskjellig i forskjellige lærebøker. Vi ser bort fra at den dessuten kan være forskjellig ved stigende og synkende Reynoldstall, og at fenomenene i overgangssonen egentlig er forholdsvis komplekse.

Denne siden er
med fullt overlegg
(nesten) BLANK