О теоремах искажения в теории конформных отображений

Г. М. Голузин (Ленинград)

В 1923 г. Loewner[1] дал параметрическое представление семейства функций, совершающих однолистное конформное отображение круга $|z|<1$ на области, лежащие в $|w|<1$, с помощью которого ему удалось продвинуться в проблеме коэфициентов семейства однолистных функций несколько далее, чем это удается другими методами.

В настоящей работе имеется целью показать, что этот же остроумный метод с успехом может быть применен также и к оценке модулей и аргументов однолистных в $|z|<1$ функций и их производных, при этом и здесь результаты получаются значительно совершеннее, чем другими методами.

В 1° излагается идея и основной результат работы Loewner'а. В последующих параграфах даются для функции

$$F(z)=z+a_2z^2+\dots, \tag{1}$$

однолистной и регулярной в $|z|<1$, оценки величин

$$|F(z)|,\ \left|\frac{F'(z)}{F(z)}\right|,\ |F'(z)|$$

и величин

$$\arg\frac{F(z)}{z},\quad \arg\frac{zF'(z)}{F(z)},\quad \arg F'(z),\quad \arg\frac{F'(z)}{[F(z)]^2}\text{ [2]}.$$

1°. При производстве оценок, относящихся к функциям вида (1), однолистным и регулярным в $|z|<1$, без ограничения общности можно допустить, что $|F(z)|$ ограничен в $|z|<1$, ибо иначе достаточно вместо $F(z)$ рассматривать $\frac{1}{\rho}F(\rho z)$, где $0<\rho<1$, и затем $\rho\to 1$. Путем помножения $F(z)$ на надлежащий положительный множитель β придем к функции

$$f(z)=\beta(z+a_2z^2+\dots), \tag{2}$$

которая отображает $|z|<1$ однолистно на область, целиком лежащую вместе с границей в $|w|<1$, и притом так, что начало и направление линейных элемен-

---

[1] „Mathematische Annalen", Bd. 89, (1923), S. 103—125.

[2] Оценками этих величин занимался автор и ранее в работе, помещенной в „Математическом сборнике", т. 36, (1929). Но результаты настоящей работы окончательные.

тов в нем сохраняются. Последнюю область и только такую будем называть ограниченной областью.

Всякую ограниченную область $\mathfrak{B}$ можно рассматривать как предел ограниченных областей, границы которых суть кривые Jordan'a, и по известному свойству непрерывности функции отображения от области (Konvergenzsatz), функция, отображающая $|z|<1$ на $\mathfrak{B}$ с сохранением начала и направления линейных элементов в нем, есть предел функций, отображающих $|z|<1$ на аппроксимирующие области с тем же условием.

Рассмотрим теперь специального вида области, получаемые из $|z|<1$ проведением разреза вдоль некоторой открытой кривой Jordan'a, лежащей в $|z|<1$, исходящей из точки на $|z|=1$ и не проходящей через $z=0$. Такие области назовем областями (S). Легко показать, что областями (S) можно аппроксимировать любую ограниченную область $\mathfrak{B}$ в том смысле, что предел функций, отображающих $|z|<1$ на эти области с сохранением начала и направления линейных элементов в нем, будет отображать $|z|<1$ на $\mathfrak{B}$ с тем же условием. Достаточно это показать для случая, когда граница $\mathfrak{B}$ есть кривая Jordan'a. Аппроксимирующие области строим тем, что проводим разрез от любой точки на $|z|=1$ до любой точки P на границе $\mathfrak{B}$ и затем от P вдоль границы $\mathfrak{B}$ до переменной точки Q. Если Q, обойдя границу $\mathfrak{B}$, будет стремиться к P, то так полученные области (S) будут обладать требуемым свойством.

В силу последнего задача оценок, относящихся к функциям вида (1), однолистным и регулярным в $|z|<1$, сводится к соответствующей задаче, относящейся к семейству функций, отображающих $|z|<1$ на области (S) с сохранением ленейных элементов в $z=0$. Пусть

$$f(z)=\beta(z+a_2z^2+\ldots) \tag{3}$$

— одна из функций, принадлежащая к последнему семейству. Пусть $\mathfrak{B}$ есть отображение $|z|<1$ этой функцией, т. е. некоторая область (S). Если будем укорачивать разрез, которым $\mathfrak{B}$ получается из $|z|<1$, то получим семейство областей (S), непрерывно зависящих от вещественного параметра t (например длины уничтоженной дуги), изменяющегося от 0 до t_0, и таких, что $\mathfrak{B}_0$ есть $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_{t_0}$ есть $|z|<1$ $\mathfrak{B}_{t'}$ содержится в $\mathfrak{B}_{t''}$ при $t'<t''$. Пусть $w=g(z,\ t)$, $g(0,\ t)=0$, $g'(0,\ t)>0$, есть функция, отображающая $|z|<1$ на $\mathfrak{B}_t$. Тогда $g(z,\ 0)=f(z)$, $g(z,\ t_0)=z$. Рассмотрим, далее, функцию

$$f(z,\ t)=g^{-1}(g(z,\ 0),\ t).$$

При каждом t, $0\leqslant t\leqslant t_0$, она отображает $|z|<1$ на область (S) и удовлетворяет условию $f(0,\ t)=0$, $f'(0,\ t)>0$. Кроме того, имеем:

$$f(z,\ 0)=z,\quad f(z,\ t_0)=g(z,\ 0)=f(z).$$

Вид параметра t находится в нашем распоряжении; замечая, что в

$$f(z,\ t)=\beta(t)(z+a_2(t)z^2+\ldots)$$

$\beta(t)$ есть непрерывная положительная функция от $t\,(0\leqslant t\leqslant t_0)$, равная 1 при $t=0$ и убывающая с возрастанием t от 0 до t_0, выбираем этот параметр так, чтобы

$$\beta(t)=e^{-t},\quad 0\leqslant t\leqslant t_0=\log\frac{1}{\beta}.$$

Тогда Loewner, путем глубокого исследования, показал, что $f(z,\ t)$ будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial f(z,\ t)}{\partial t}=-f(z,\ t)\frac{1+k(t)f(z,\ t)}{1-k(t)f(z,\ t)},\tag{4}$$

где $k\ (t)$ непрерывна и $|k(t)|=1$. Это и есть основной результат его работы. Разделив (4) на $f(z,\ t)$ и взяв от обеих сторон вещественные части, приходим к следующему уравнению:

$$\frac{\partial|f(z,t)|}{\partial t}=-|f(z,\ t)|\frac{|1-f(z,\ t)|^2}{|1-k(t)f(z,t)|^2},\tag{5}$$

из которого, между прочим, заключаем, что $|f(z,\ t)|$ при фиксированном z из $|z|<1$ будет убывающей функцией от t в $0\leqslant t\leqslant t_0$, т. е. $d_t|f(z,\ t)|<0$. Уравнения (3) и (4) и последнее замечание и послужат для решения поставленных перед нами задач. При этом для краткости условимся $f(z,\ t)$ коротко обозначать через f и d_t — знак частного диференциала по t через d. Под $F(z)$ понимается в дальнейшем любая функция вида (1), однолистная и регулярная в $|z|<1$.

2°. Теорема 1 (Bieberbach):

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2}\leqslant|F(z)\leqslant\frac{|z|}{(1-|z|)^2}.$$

Доказательство. Займемся оценкой $|f(z)|$. Из (5) имеем:

$$-|f|\frac{1+|f|}{1-|f|}\leqslant\frac{\partial|f|}{\partial t}\leqslant-|f|\frac{1-|f|}{1+|f|},$$

откуда

$$\frac{1-|f|}{|f|(1+|f|)}d|f|\geqslant-dt,\qquad \frac{1+|f|}{|f|(1-|f|)}d|f|\leqslant-dt.$$

Интегрируя обе части этих неравенств от 0 до t_0 и освобождаясь от логарифмов, получим:

$$\frac{|f|}{(1+|f|)^2}\geqslant e^{-t_0}\frac{|z|}{(1+|z|)^2},\qquad \frac{|f|}{(1-|f|)^2}\leqslant e^{-t_0}\frac{|z|}{(1-|z|)^2},$$

и и, отбрасывая в знаменателях $(1+|f|)^2$ и $(1-|f|)^2$, отчего неравенства не нарушаются, и замечая, что $e^{-t_0}=\beta$, получим:

$$\frac{\beta|z|}{(1+|z|)^2}\leqslant|f(z)|\leqslant\frac{\beta|z|}{(1-|z|)^2}.\tag{6}$$

Хотя (6) и доказано только для функции (3), отображающей $|z|<1$ на области (S), но в силу 1° оно будет иметь место и для любой функции $f(z)$, отображающей $|z|<1$ на ограниченную область. Переходя от (2) к (1), получаем для любой функции $F\ (z)$ вида (1), однолистной и регулярной в $|z|<1$, неравенство

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2}\leqslant|F(z)|\leqslant\frac{|z|}{(1-|z|)^2},\tag{7}$$

т. е. теорему 1.

Теоремы 2 и 3 (Bieberbach, Nevanlinna):

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leqslant |F'(z)| \leqslant \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}, \tag{8}$$

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leqslant \left|\frac{zF'(z)}{F(z)}\right| \leqslant \frac{1+|z|}{1-|z|}. \tag{9}$$

Доказательство. Эти теоремы можно было бы пытаться доказать тем же путем, как и теорему 1. Но они проще вытекают из теоремы 1. Именно, так как функция

$$G(z) = \frac{F\left(\dfrac{\zeta+z}{1+\zeta\bar{z}}\right) - F(z)}{F'(z)(1-|z|^2)} = \zeta + a_2\zeta^2 + \ldots \tag{10}$$

однолистна и регулярна в $|\zeta| < 1$ при любом z из $|z| < 1$, то, применяя к ней (7) в точке $\zeta = -z$, получим (9). Перемножая же это с (7), получаем и (8).

Примечание. Отметим, что неравенства (7)—(9) хорошо известны и дают точные границы оцениваемых величин.

3°. Теорема 4 (Grunsky, Grötzsch):

$$\left|\arg\frac{F(z)}{z}\right| \leqslant \log\frac{1+|z|}{1-|z|}. \tag{11}$$

Доказательство. Обратимся к оценке $\left|\arg\frac{f(z)}{z}\right|$. Разделив обе стороны равенства (4) на $f(z, t)$ и взяв затем мнимые части, получим:

$$d\arg f = -\mathcal{Y}\left(\frac{1+kf}{1-kf}\right)dt = -\frac{2\mathcal{Y}(kf)}{|1-kf|^2}dt,$$

откуда

$$|d\arg f| \leqslant \frac{2|f|}{|1-kf|^2}dt.$$

Но из (5) находим:

$$dt = -\frac{|1-kf|^2}{1-|f|^2}\frac{d|f|}{|f|}.$$

Подставляя это в предыдущее неравенство, приходим к следующему:

$$|d\arg f| \leqslant -\frac{2d|f|}{1-|f|^2},$$

интегрируя которое по t от 0 до t_0, получим:

$$\left|\arg\frac{f(z)}{z}\right| \leqslant \int\limits_{|f(z)|}^{|z|}\frac{2d|f|}{1-|f|^2} \leqslant \int\limits_0^{|z|}\frac{2d|f|}{1-|f|^2} = \log\frac{1+|z|}{1-|z|},$$

т. е.

$$\left|\arg\frac{f(z)}{z}\right| \leqslant \log\frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

Отсюда по 1° получаем, далее, теорему 4.

Теорема 5 (Grunsky):

$$\left|\arg\frac{zF'(z)}{F(z)}\right| \leqslant \log\frac{1+|z|}{1-|z|}. \tag{12}$$

Доказательство. Это тотчас же получается, применив (11) к функции (10) в точке $\zeta = -z$.

4°. Теорема 6:

$$|\arg F'(z)| \leqslant \begin{cases} 4 \arcsin |z| \quad \textit{при} \quad |z| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \pi + \log \frac{|z|^2}{1-|z|^2} \quad \textit{при} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant |z| < 1. \end{cases} \tag{13}$$

Доказательство. Оценим $|\arg f'(z)|$. Из (4) имеем:

$$\frac{\partial f'}{\partial t} = -f' \, \frac{1+2kf-k^2f^2}{(1-kf)^2}, \quad \text{где } f' = \frac{\partial t(z, t)}{\partial z}.$$

Отсюда:

$$\frac{\partial \arg f'}{\partial t} = -\mathcal{Y}\left(\frac{1+2kf-k^2f^2}{(1-kf)^2}\right) = -\frac{\mathcal{Y}(4kf-2k^2f^2)}{|1-kf|^4} = \frac{2\mathcal{Y}((1-kf)^2)}{|1-kf|^4},$$

и следовательно,

$$|d \arg f'| = \frac{2|\mathcal{Y}((1-kf)^2|\,dt}{|1-kf|^4} = \frac{2|\mathcal{Y}((1-kf)^2)|}{|1-kf|^2} \cdot \frac{-d|f|}{(1-|f|^2)|f|}.$$

Но

$$\frac{|\mathcal{Y}((1-kf)^2)|}{|1-kf|^2} = |\sin 2\arg(1-kf)| \leqslant \begin{cases} \sin 2 \arcsin |f| = 2|f|\sqrt{1-|f|^2} & \text{при } |f| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ 1 & \text{,, } |f| < 1, \end{cases}$$

так что

$$|d \arg f'| \leqslant \begin{cases} -\frac{4d|f|}{\sqrt{1-|f|^2}} & \text{при } |f| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ -\frac{2d|f|}{(1-|f|^2)|f|} & \text{,, } \frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant |f| < 1. \end{cases}$$

Интегрируя это по t от 0 до t_0, при $|z| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$ получим:

$$|\arg f'(z)| \leqslant \int_{|f(z)|}^{|z|} \frac{4d|f|}{\sqrt{1-|f|^2}} \leqslant 4 \arcsin |z|,$$

а при $|z| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$|\arg f'(z)| \leqslant \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{4d|f|}{\sqrt{1-|f|^2}} + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{|z|} \frac{2d|f|}{(1-|f|^2)|f|},$$

т. е.

$$|\arg f'(z)| \leqslant \pi + \log \frac{|z|^2}{1-|z^2|}.$$

Отсюда, далее, по 1° получаем теорему 6.

Примечание. Отметим пока, что при $|z| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$ найденная граница для $|\arg F'(z)|$ точная, ибо для каждого $\rho \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$ и для функции

$$F(z) = \int_0^z \frac{(1-e^{i\alpha}z)}{(1-e^{-i\alpha}z)^3}\,dz = z + \alpha_2 z^2 + \ldots, \quad \alpha = \arccos \rho,$$

однолистной и регулярной в $|z|<1$, имеем:

$$|\arg F'(\rho)| = 4 \arcsin \rho.$$

5°. Теорема 7:

$$\left|\arg \frac{z^2 F'(z)}{[F(z)]^2}\right| \leqslant \log \frac{1}{1-|z|^2}. \tag{14}$$

Доказательство. Оценим $\arg \frac{z^2 f'(z)}{[f(z)]^2}$. Из (4) имеем:

$$\frac{\partial \frac{1}{f}}{\partial t} = -\frac{1}{f} \frac{1+\frac{1}{kf}}{1-\frac{1}{kf}},$$

и отсюда, как в предыдущем параграфе, получаем:

$$\left| d \arg \frac{f'}{f^2} \right| = \frac{2\left|\mathcal{Y}\left(\left(1-\frac{1}{kf}\right)^2\right)\right|}{\left|1-\frac{1}{kf}\right|^4} dt = \frac{2\mathcal{Y}\left|\left(\left(1-\frac{1}{kf}\right)^2\right)\right|}{\left|1-\frac{1}{kf}\right|^2} \cdot \frac{-|f|\,d|f|}{1-|f|^2} \leqslant \frac{-2|f|\,d|f|}{1-|f|^2},$$

и следовательно,

$$\left|\arg \frac{z^2 f'(z)}{[f(z)]^2}\right| \leqslant \int_0^{|z|} \frac{2|f|\,d|f|}{1-|f|^2} = \log \frac{1}{1-|z|^2}.$$

Отсюда, далее, непосредственно следует теорема 7.

Следствие (Grunsky). Если функция

$$\Phi(\zeta) = \zeta + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\zeta} + \ldots$$

регулярна и однолистна в $|\zeta|>1$, за исключением простого полюса при $\zeta=\infty$, то при надлежащем c функция

$$F(z) = \frac{1}{\Phi\left(\frac{1}{z}\right)-c} = z + a_2 z^2 + \ldots$$

будет регулярна и однолистна в $|z|<1$, и к ней применима теорема 7, и мы получим:

$$|\arg \Phi'(\zeta)| \leqslant -\log\left(1-\frac{1}{|\zeta|^2}\right). \tag{15}$$

6°. Примечания. Неравенства (11), (12) и (15) получены ранее Grunsky [1] и дают точные границы оцениваемых величин при любом z из $|z|<1$. Отсюда тотчас же следует и точность оценки (14). Что касается оценки (13), то выше была доказана ее точность при $|z| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$. С другой стороны, пример функции Bieberbach'a

$$F(z) = \frac{e^{(1+i)\log\frac{1+z}{1-z}}-1}{2(1+i)} = z + a_2 z^2 + \ldots,$$

[1] „Schriften des Mathematischen Seminars und Instituts für angewandte Mathematik der Universität Berlin", Bd. I, Heft 3, (1932). (11) доказано также Grötzsch'ем, „Sitzungsberichte d. Preuss. Akademie d. Wiss.", 1933. Методы Grunsky и Grötzsch'a существенно отличны от настоящего.

однолистной и регулярной в $|z|<1$, для которой при вещественном z

$$\arg F(z)\log\frac{1+z}{1-z},$$

показывает, что оценка (13) при всех $|z|<1$ отличается от точной на ограниченную величину[1].

7°. Дадим некоторые применения полученных оценок. Grunsky[2], приравнивая правую часть неравенства (12) величине $\frac{\pi}{2}$, получает точную величину, равную $\operatorname{th}\frac{\pi}{4}=0{,}65\ldots$, радиуса наибольшего круга $|z|<R$, отображаемого любой функцией вида (1), однолистной и регулярной в $|z|<1$, на область, звездообразную относительно $z=0$.

Введем теперь следующее определение: назовем звездой функции $F(z)$ наибольшую звездообразную относительно $z=0$ область, содержащуюся в отображении $z<1$ функциею $F(z)$.

Теорема 8. *Отображение $|z|<\frac{1}{\sqrt{2}}$ лежит в звезде.*

Доказательство. Вместе с функцией $F(z)$ будет однолистной и регулярной в $|z|<1$ и функция

$$\frac{cF(z)}{c-F(z)}=z+a_2z^2+\ldots, \tag{16}$$

где c — любое, не лежащее в отображении $|z|<1$ функцией $F(z)$. Применяя к ней (13), получим:

$$\left|\arg\frac{c^2F'(z)}{(c-F(z))^2}\right|\leqslant 4\arcsin|z| \quad \text{при } |z|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}},$$

а складывая это с (13), получим:

$$\left|\arg\frac{c-F(z)}{c}\right|\leqslant 4\arcsin|z| \quad \text{при } |z|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Это показывает, что, каково бы ни было z из $|z|<\frac{1}{\sqrt{2}}$, при c, не лежащем в отображении $|z|<1$ функцией $w=F(z)$ и лежащем на луче, идущем из $w=0$ к $w=F(z)$, имеем $\arg\frac{c-F(z)}{c}=0$, т. е. c лежит за точкой $F(z)$, что, очевидно, и доказывает теорему 8.

Теорема 9. *Наиболее удаленная от $w=0$ точка отображения $|z|=r$, где $r<\operatorname{th}\frac{\pi}{2}=0{,}91\ldots$, лежит в звезде.*

Доказательство. Применяя (12) к функции (16), получаем:

$$\left|\arg\frac{czF'(z)}{F(z)(c-F(z))}\right|\leqslant\log\frac{1+|z|}{1-|z|}. \tag{17}$$

[1] Во время печатания настоящей работы И. Базилевичу удалось показать точность оценки (13) и при $\frac{1}{\sqrt{2}}<|z|<1$; это будет сообщено им в ближайшем выпуске „Математического сборника“.

[2] Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung“, 1933.

Пусть теперь z_0 — та точка на $|z|=r$, для которой $|F(z)|$ имеет наибольшее значение, и рассмотрим функцию

$$\varphi(z)=\frac{F(zz_0)}{F(z_0)},$$

которая регулярна в $|z|\leqslant 1$ и там $|\varphi(z)|\leqslant 1$, $\varphi(1)=1$. Отсюда заключаем, что $\varphi'(1)$ должно быть положительным, ибо иначе часть окрестности $z=1$, лежащая в $|z|<1$, при отображении $w=\varphi(z)$ выходила бы вне $|w|<1$. Итак,

$$\varphi'(1)=\frac{z_0F'(z_0)}{F(z_0)}>0, \quad \text{или } \arg\frac{z_0F'(z_0)}{F(z_0)}=0.$$

Следовательно, из (17) получаем:

$$\left|\arg\frac{c-F(z_0)}{c}\right|\leqslant\log\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}=\log\frac{1+r}{1-r},$$

и это при любом c, не лежащем в отображении $|z|<1$ функцией $w=F(z)$. Пусть теперь $r<\operatorname{th}\frac{\pi}{2}$; тогда:

$$\left|\arg\frac{c-F(z_0)}{c}\right|<\pi,$$

и следовательно, если c лежит на луче, идущем от $w=0$ к $w=F(z)$, то должно быть:

$$\arg\frac{c-F(z_0)}{c}=0;$$

следовательно, c лежит за точкой $F(z_0)$, т. е. $F(z_0)$ принадлежит звезде, что и требовалось доказать.

Примечание 1. Из теоремы 9 как следствие получаем, что при $r<\operatorname{th}\frac{\pi}{2}=0{,}91\ldots$ отрезок, соединяющий $w=0$ с наиболее удаленной точкой отображения $|z|=r$ функцией $w=F(z)$, целиком лежит в отображении $|z|<1$ функциею $w=F(z)$. При любых же $r<1$ этого сказать нельзя, ибо существуют функции $w=F(z)$, отображающие $|z|<1$ на спиралеобразные области.

Примечание 2. Так как наиудаленная от $w=0$ точка отображения $|z|=r$ функцией $w=F(z)$ отстоит от $w=0$ не ближе, чем на r, то из примечания 1 следует, что существует отрезок длины, не меньшей $\operatorname{th}\frac{\pi}{2}=0{,}91\ldots$, исходящий из $w=0$, который целиком содержится в отображении $|z|<1$ функцией $w=F(z)$. Впрочем, из одного результата Rengel'я[1] легко показать, что существует отрезок длины, сколь угодно близкой к 1, обладающий тем же свойством[2].

Н.-И. И. М. М. Л. Г. У.
28 августа 1935 г.

(Поступило в редакцию 11/XI 1935 г.)

---

[1] „Schriften des Mathematischen Seminars und Instituts für angewandte Mathematik der Universität Berlin", Bd. I, Heft 4, (1933).

[2] Это же будет доказано и в одной из моих ближайших работ.

Über die Verzerrungssätze der schlichten konformen Abbildungen

G. M. Golusin (Leningrad)

(Résumé)

Der Verfasser betrachtet die Funktionen

$$F(z) = z + a_2 z^2 + \dots,$$

die den Kreis $|z| < 1$ schlicht abbilden, und beweist mittels der Loewnerschen Methode der parametrischen Darstellung der Schlitzabbildungen die folgenden Ungleichungen:

$$\left|\arg \frac{F(z)}{z}\right| \leqslant \log \frac{1+|z|}{1-|z|}, \quad \left|\arg \frac{zF'(z)}{F(z)}\right| \leqslant \log \frac{1+|z|}{1-|z|},$$

$$|\arg F'(z)| \leqslant \begin{cases} 4 \arcsin |z| & \text{bei } |z| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ \pi + \log \dfrac{|z|^2}{1-|z|^2} & \text{,, } \dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqslant |z| < 1, \end{cases}$$

$$\left|\arg \frac{z^2 F'(z)}{|F(z)|^2}\right| \leqslant -\log(1-|z|^2).$$

Diese Abschätzungen können nicht verbessert werden.