Sur les théorèmes de rotation dans la théorie des fonctions univalentes

G. M. Golusin (Léningrad)

Dans un article[1] j'ai donné les bornes de grandeurs:

$$\arg\frac{F(z)}{z},\ \arg\frac{zF'(z)}{F(z)},\ \arg\frac{z^2F'(z)}{[F(z)]^2},\ \arg F'(z),$$

où $F(z)=z+a_2z^2+\dots$ est univalente et régulière dans $|z|<1$; les bornes que j'ai trouvées sont précises pour les trois premières grandeurs; elles ont été trouvées précédemment par Grunsky; en ce qui concerne les $\arg F'(z)$, j'ai réussi seulement à démontrer que la borne de $|\arg F'(z)|$ pour $|z|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$ est précise. C'est M. Basilewitsch qui a prouvé que ma borne est encore précise dans le cas $|z|\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Dans le présent article en simplifiant le raisonnement de M. Basilewitsch je démontre que non seulement pour $|\arg F'(z)|$, mais pour toutes les autres grandeurs indiquées mes bornes sont précises. Je suppose que le lecteur a déjà fait connaissance de l'article précédemment indiqué.

§ 1. Démonstration du fait que les bornes de $\arg\frac{f(z)}{z}$ données par le théorème 4[2] sont précises

Démontrons qu'il existe une fonction $k(t)$, $|k(t)|=1$, continue pour $0\leqslant t<\infty$ et telle que la fonction $f(z, t)$ définie par les équations:

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t}=-f(z,t)\,\frac{1+k(t)f(z,t)}{1-k(t)f(z,t)}, \tag{1}$$

$$f(z,0)=z, \tag{2}$$

vérifie pour chaque valeur de t, $0<t<\infty$, et pour un $z=z_0$ donné dans $|z|<1$ la condition:

$$\mathfrak{I}\,(k(t)f(z_0,t))=-|f(z_0,t)|. \tag{3}$$

En effet, en divisant (1) par $f(z, t)$ et en considérant les parties réelle et imaginaire, on a:

$$\frac{\partial|f|}{\partial t}=-|f|\frac{1-|f|^2}{|1-kf|^2},\quad \frac{\partial\arg f}{\partial t}=-\frac{2\mathfrak{I}(kf)}{|1-kf|^2}, \tag{3'}$$

---

[1] „О теоремах искажения в теории конформных отображений", „Recueil mathématique", t. 1 (43), p. 127—135.

[2] Voir l'article, loc. cit.

ou, en vertu de (3), pour $z=z_0$:

$$\frac{\partial |f|}{\partial t} = -|f|\frac{1-|f|^2}{1+|f|^2}, \quad \frac{\partial \arg f}{\partial t} = \frac{2|f|}{1+|f|^2}. \tag{4}$$

En intégrant la première de ces équations différentielles, on a:

$$\frac{|f|}{1-|f|^2} = e^{-t}\frac{|z_0|}{1-|z_0|^2},$$

d'où

$$|f| = \frac{-(1-|z_0|^2)+\sqrt{(1-|z_0|^2)^2+4e^{-2t}|z_0|^2}}{2|z_0|}, \tag{5}$$

ce qui définit $|f|$ en fonction de t. En éliminant dt des équations (4), on a:

$$d\arg f = -\frac{2d|f|}{1-|f|^2},$$

d'où

$$\arg\frac{f(z_0, t)}{z_0} = \log\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|} - \log\frac{1+|f|}{1-|f|}, \tag{6}$$

ce qui, en vertu de (5), est encore une fonction de t. Ceci étant, on trouve maintenant $k(t)$ de l'équation:

$$\arg k(t) + \arg f(z_0, t) = -\frac{\pi}{2}.$$

Donc, $k(t)$ est trouvée. On a pour la fonction correspondante $f(z, t)$ définie par les équations (1) et (2) au point $z=z_0$ la relation (6), d'ailleurs le second membre de cette formule tend vers $\log\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}$ quand $t\to\infty$. Donc, le théorème (4) donne une valeur précise pour la borne supérieure de $\arg\frac{f(z)}{z}$.

On démontre d'une manière analogue qu'il existe une fonction $k(t)$, $|k(t)|=1$, continue dans $0\leqslant t<\infty$ telle que la fonction $f(z, t)$ définie par les équations (1) et (2) vérifie la condition:

$$\mathfrak{I}(f(z_0, t)) = |f(z_0, t)|,$$

et que d'ailleurs on a pour cette fonction $f(z, t)$:

$$\arg\frac{f(z_0, t)}{z_0} = -\log\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|} + \log\frac{1+|f|}{1-|f|},$$

ce qui tend vers $-\log\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}$ pour $t\to\infty$.

Ainsi la borne inférieure de $\arg\frac{f(z)}{z}$ indiquée par le théorème 4 est encore précise.

Il en résultera que les limites de $\left|\arg\frac{zF'(z)}{F(z)}\right|$ données par le théorème 5 sont aussi précises.

§ 2. Démonstration du fait que les bornes de $\arg F'(z)$ données par les théorèmes 6 sont précises

Démontrons maintenant qu'il existe une fonction $k(t)$, $|k(t)|=1$, continue dans $0\leqslant t<\infty$, telle que la fonction $f(z, t)$ définie par les équations (1) et (2) vérifie pour chaque t, $0<t<\infty$, et pour un $z=z_0$, donné dans $|z|<1$, la condition:

$$\frac{\mathfrak{I}((1-kf)^2)}{|1-kf|^2} = \sin 2\arg(1-kf) = \left.\begin{array}{ll} -2|f|\sqrt{1-|f|^2} & \text{pour } |f|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ -1 & \quad\text{,,}\quad |f|\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}, \end{array}\right\} \tag{7}$$

ou, ce qui est le même:

$$\frac{\mathcal{I}(kf)}{|1-kf|} = \sin\arg(1-kf) = \begin{cases} -|f| & \text{pour } |f| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \text{,, } |f| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases} \tag{8}$$

En posant $\arg kf = \varphi$, on a de (8):

$$\frac{\sin^2\varphi}{1-2|f|\cos\varphi+|f|^2} = \begin{cases} 1 & \text{pour } |f| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \frac{1}{2|f|^2} & \text{,, } |f| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}, \end{cases}$$

d'où il résulte que

$$\cos\varphi = \begin{cases} |f| & \text{pour } |f| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \frac{1 \pm \sqrt{2|f|^2-1}}{2|f|} & \text{,, } |f| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}; \end{cases}$$

donc

$$kf = \begin{cases} |f|\left(|f| - i\sqrt{1-|f|^2}\right) & \text{pour } |f| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \frac{1 \pm \sqrt{2|f|^2-1}}{2} - i\,\frac{1 \mp \sqrt{2|f|^2-1}}{2} & \text{,, } |f| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}, \end{cases}$$

on peut choisir arbitrairement l'un des deux signes plus ou moins.

En exprimant kf en fonction de t et en portant cette valeur dans (3) on trouve de la première de ces équations t en fonction continue et monotone de $|f|$, d'où il résulte que $|f|$ est définie comme une fonction continue et positive de t; ensuite la seconde des équations (3) définit $\arg \frac{f(z_0, t)}{z_0}$ en fonction de t. Quand on connaît $\arg kf$, on trouve $\arg k(t)$, donc $k(t)$. En vertu du théorème 6 on a pour la fonction trouvée (z, t):

$$\lim_{t\to\infty} \arg f'(z_0, t) = \begin{cases} 4\arcsin|z_0| & \text{pour } |z_0| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \pi + \log\frac{|z_0|^2}{1-|z_0|^2} & \text{,, } |z_0| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}, \end{cases}$$

ce qui prouve que le théorème 6 donne une borne supérieure précise pour $\arg f'(z)$ quel que soit z dans $|z|<1$; il en est de même pour la borne inférieure.

§ 3. Démonstration du fait que les bornes de $\arg \frac{z^2 f'(z)}{[F(z)]^2}$ données par le théorème 7 sont précises

On démontre, d'une manière analogue, qu'il existe une fonction $k(t)$, $|k(t)|=1$, continue dans $0 \leqslant t < \infty$ et telle que la fonction $f(z, t)$ définie par les équations (1) et (2) vérifie pour chaque t, $0 \leqslant t < \infty$, et pour un $z = z_0$, donné dans $|z|<1$, la relation:

$$\frac{\mathcal{I}\left(\left(1-\frac{1}{kf}\right)^2\right)}{\left|1-\frac{1}{kf}\right|^2} = \sin 2\arg\left(1-\frac{1}{kf}\right) = -1,$$

ou, ce qui est le même,

$$\frac{\mathfrak{I}\left(1-\frac{1}{kf}\right)}{\left|1-\frac{1}{kf}\right|}=\sin\arg\left(1-\frac{1}{kf}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

On trouve dans ce cas comme au § 2

$$\frac{1}{kf}=\frac{|f|\pm\sqrt{2-|f|^2}}{2}-i\,\frac{|f|\mp\sqrt{2-|f|^2}}{2}$$

et on fait les calculs analogues à ceux qui ont permis de déterminer $k(t)$. En vertu du théorème 7, on a pour la fonction $f(z, t)$ trouvée

$$\lim_{t\to\infty}\arg\frac{z_0^2 f'(z_0, t)}{[f(z_0, t)]^2}=-\log(1-|z_0|^2)$$

ce qui prouve que le théorème 7 donne une borne supérieure exacte pour $\arg\frac{z^2 f'(z)}{[f(z)]^2}$ quel que soit z dans $|z|<1$. On démontre d'une manière analogue qu'il est de même pour la borne inférieure de $\arg\frac{z^2 f'(z)}{[f(z)]^2}$.

Н.-И. И. М. М. Л. Г. У. им. Бубнова.

(Поступило в редакцию 11/I 1936 г.)

О теоремах вращения в теории однолистных функций

Г. М. Голузин (Ленинград)

(Резюме)

В этой заметке автор дает доказательство точности оценок величин

$$\arg\frac{F(z)}{z},\quad \arg\frac{zF'(z)}{F(z)},\quad \arg F'(z),\quad \arg\frac{z^2F'(z)}{F(z)},$$

данных в работе „О теоремах искажения в теории конформных отображений“ [1]. Здесь $F(z)=z+a_2z^2+\ldots$ однолистна и регулярна в $|z|<1$.

[1] «Математический сборник», т. 1 (43), стр. 127—135.