Дополнение к работе «О теоремах искажения в теории конформных отображений»

Г. М. Голузин (Ленинград)

В работе автора «О теоремах искажения в теории конформных отображений» [1] был указан единый путь для получения ряда оценок, относящихся к функциям $F(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$, совершающим однолистное конформное отображение круга $z < 1$ на области, не содержащие ∞, и к функциям $\Phi(\zeta) = \zeta + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\zeta} + \ldots$, совершающим однолистное отображение $|\zeta| > 1$ на области, содержащие ∞. Этот путь основан на использовании параметрического представления Löwner'а одного важного класса однолистных отображений круга $|z| < 1$. Используя это параметрическое представление, были найдены точные оценки величин

$$|F(z)|, \quad \left|\frac{F'(z)}{F(z)}\right|, \quad |F'(z)|, \quad \arg\frac{F(z)}{z}, \quad \arg\frac{zF'(z)}{F(z)}, \quad \arg F'(z) \quad \text{и} \quad \arg\Phi'(\zeta)$$

в любой точке из $|z| < 1$ или $|\zeta| > 1$. В настоящей заметке мы покажем, что, исходя из того же параметрического представления Löwner'а, можно так же получить точные оценки для $|\log F(z)|$, $\left|\log\frac{zF'(z)}{F(z)}\right|$ и $|\log\Phi'(\zeta)|$, найденные ранее иным путем Grunsky'м. При этом будем считать известным 1° цитированной выше работы и будем использовать, не оговаривая, принятые там обозначения.

1°. Теорема 1.

$$\left|\log\frac{zF'(z)}{F(z)}\right| \leqslant \log\frac{1+|z|}{1-|z|}. \tag{1}$$

Доказательство. Из уравнения (4) цитированной работы делением на f, диференцированием по z и дальнейшим делением на $\frac{f'}{f}$ получаем

$$\frac{\partial \log\frac{f'}{f}}{\partial t} = -\frac{2kf}{(1-kf)^2},$$

откуда

$$\left|\frac{\partial \log\frac{f'}{f}}{\partial t}\right| = \frac{2|f|}{|1-kf|^2}. \tag{2}$$

Исключая отсюда и из (5) цитированной работы dt, придем к уравнению

$$\left|d\log\frac{f'}{f}\right| = \frac{-2d|f|}{1-|f|^2}, \tag{3}$$

[1] Математич. сб., **1 (43)**:1, (1936), 127—135.

откуда при любом вещественном θ, которое будем считать не зависящим от t, получаем:

$$R\left(e^{-i\theta} d \log \frac{f'}{f}\right) \leqslant \frac{-2d\,|f|}{1-|f|^2}. \tag{4}$$

Интегрируя обе части последнего неравенства по t от 0 до t_0, получаем:

$$R\left(e^{-i\theta} \log \frac{zf'(z)}{f(z)}\right) \leqslant \int\limits_{|f(z)|}^{|z|} \frac{2d\,|f|}{1-|f|^2} \leqslant \log \frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

Отсюда по 1° цитированной работы следует:

$$R\left(e^{-i\theta} \log \frac{zF'(z)}{F(z)}\right) \leqslant \log \frac{1+|z|}{1-|z|}; \tag{5}$$

при надлежащем θ это дает теорему 1.

2°. Теорема 2.

$$\left|\log \frac{F(z)}{z} + \log(1-|z|^2)\right| \leqslant \log \frac{1+|z|}{1-|z|}. \tag{6}$$

Доказательство. Достаточно применить (1) к функции

$$G(\zeta) = \frac{F\left(\dfrac{\zeta+z}{1+\bar{z}\zeta}\right) - F(z)}{F'(z)(1-|z|^2)} = \zeta + b_2\zeta^2 + \ldots$$

в точке $\zeta = -z$; тогда, замечая, что $\dfrac{-zG'(-z)}{G(-z)} = \dfrac{1}{f(z)(1-|z|^2)}$, и получаем теорему 2; при этом под $\log \dfrac{F(z)}{z}$ здесь следует понимать ветвь многозначной логарифмической функции, определяемую из формулы:

$$\log \frac{F(z)}{z} = -\log(1-|z|^2) + \int\limits_0^{-z} d_\zeta \log \frac{f\left(\dfrac{\zeta+z}{1+\bar{z}\zeta}\right) - f(z)}{-\zeta f'\left(\dfrac{\zeta+z}{1+\bar{z}\zeta}\right) \dfrac{1-|z|^2}{(1-\bar{z}\zeta)^2}} =$$

$$= \int\limits_z^{\infty} d_\zeta \log \frac{f(\zeta)-f(z)}{f'(\zeta)(\zeta-z)},$$

т. е. ветвь, стремящуюся к 0 при $z \to 0$.

3°. Теорема 3.

$$|\log \Phi'(\zeta)| \leqslant -\log\left(1 - \frac{1}{|\zeta|^2}\right). \tag{7}$$

Доказательство. Положив

$$\zeta = \frac{1}{z}, \quad \varphi(\zeta, t) = \frac{1}{f(z, t)} = e^t\zeta + \ldots,$$

получаем из уравнения (4) цитированной работы

$$\frac{\partial\varphi(\zeta, t)}{\partial t} = \varphi(\zeta, t)\, \frac{\varphi(\zeta, t) + k(t)}{\varphi(\zeta, t) - k(t)}, \tag{8}$$

откуда далее находим

$$\frac{\partial|\varphi|}{\partial t} = |\varphi|\, \frac{|\varphi|^2 - 1}{|\varphi - k|^2}, \quad \left|\frac{\partial \log \varphi'}{\partial t} - 1\right| = \frac{2}{|\varphi - k|^2}.$$

Исключая отсюда $|\varphi - k|^2$, имеем:

$$|d\log\varphi' - dt| = \frac{2d\,|\varphi|}{|\varphi|(|\varphi|^2-1)}, \tag{9}$$

откуда при любом вещественном θ, которое опять считаем независящим от t, находим:

$$R(e^{-i\theta} d \log(\varphi' e^{-t})) \leqslant \frac{2d\,|\varphi|}{|\varphi|(|\varphi|^2-1)}. \tag{10}$$

Интегрируя это неравенство по t от 0 до t_0, получаем:

$$R(e^{-i\theta} \log(\varphi'(z)\, e^{-t_0})) \leqslant \int_{|\zeta|}^{|\varphi|} \frac{2d\,|\varphi|}{|\varphi|(|\varphi|^2-1)} \leqslant -\log\left(1-\frac{1}{|\zeta|^2}\right),$$

откуда по 1° цитированной работы легко заключаем о справедливости неравенства

$$R(e^{-i\theta} \log \Phi'(\zeta)) \leqslant -\log\left(1-\frac{1}{|\zeta|^2}\right). \tag{11}$$

При надлежащем θ это дает теорему 3.

4°. Остается показать точность оценок (1) и (7), так как точность (6) следует из точности (1). Однако можно доказать более: именно, точность оценок (4) и (9) при любом θ. Чтобы доказать, что для заданной точки z_0 из $|z|<1$ и некоторой функции $F(z)$ рассматриваемого класса в (4) имеет место знак равенства, достаточно показать, что существует функция $f(z, t)$, определенная в $0 \leqslant t < \infty$, для которой при $z = z_0$ и любом t из $0 \leqslant t < \infty$ выполняется условие

$$J\left(e^{-i\theta} d \log \frac{f'}{f}\right) = 0.$$

Для выполнения же последнего достаточно по (2) выполнение при $z = z_0$ и любом t, $0 \leqslant t < \infty$ условия

$$J\left(e^{-i\theta} \frac{2kf}{(1-kf)^2}\right) = 0.$$

Существование функции $f(z, t)$, удовлетворяющей последнему условию, можно провести тем же путем, какой дважды применялся автором в статье «Sur les theoremes de rotation dans la theorie des fonctions univalentes» [1]. Аналогичен и путь доказательства точности оценки (11).

Н.-И. И. М. М. Л. Г. У.

Ergänzung zur Arbeit «Über die Verzerrungssätze der schlichten konformen Abbildungen»

G. Golusin [2] (Leningrad)

(Résumé)

Der Verfasser betrachtet die Funktionen $F(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$, die im $|z| < 1$ reguläre und schlichte sind, und die Funktionen $\Phi(\zeta) = \zeta + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\zeta} + \ldots$, die im

[1] Математич. сб., **1 (43)**:3, (1936), 293—296.

[2] «Recueil Mathématique», Nouvelle série, **1 (43)**, (1936), 127—135.

$\zeta| > 1$ bis auf $\zeta = \infty$ reguläre und schlichte sind und beweist mittels der Löwner'schen Methode der parametrischen Darstellung der Schlitzabbildungen die Ungleichungen:

$$\left| \log \frac{zF'(z)}{F(z)} \right| \leqslant \log \frac{1+|z|}{1-|z|}, \quad \left| \log \frac{F(z)}{z} + \log(1-|z|^2) \right| \leqslant \log \frac{1+|z|}{1-|z|},$$

$$|\log \Phi'(\zeta)| \leqslant -\log\left(1 - \frac{1}{|\zeta|^2}\right).$$