К теории однолистных функций

Г. М. Голузин (Ленинград)

В настоящей статье дается обобщение параметрического представления Löwner'а[1] для однолистных функций, которое затем прилагается к выводу некоторых углублений принципа Lindelöf'а, ранее данных Biernacki[2].

1°. Пусть в плоскости ζ имеется односвязная область B, содержащая $\zeta=0$ и не содержащая $\zeta=\infty$. Пусть эта область разрезана вдоль открытой кривой Жордана L, не проходящей через $\zeta=0$ и целиком лежащей в B, кроме одного конца, который лежит на границе B. Если область B неограниченная, то L может простираться и в бесконечность, причем тогда считаем, что каждая ее конечная дуга есть кривая Жордана и что при движении по ней в одном направлении точка удаляется в бесконечность.

Укорачивая разрез L, начиная с конца, лежащего в B, получим семейство однолистных областей B_t, зависящего от некоторого вещественного параметра t, непрерывно изменяющегося в промежутке (t_0, t_1), причем B_{t_0} есть область B с разрезом L, B_{t_1} есть полная область B и при $t'<t''$ область $B_{t'}$ содержится в $B_{t''}$, не совпадая с $B_{t''}$. Пусть

$$\zeta=g(z, t), \quad g(0, t)=0, \quad g'(0, t)>0$$

есть функция, конформно отображающая $|z|<1$ на B_t. Если положить

$$g(z, t)=\beta(t)(z+a_2(t)z^2+\ldots),$$

то $\beta(t)$ будет непрерывной, положительной и строго возрастающей функцией от t в (t_0, t_1). Выберем параметр t таким образом, чтобы

$$\beta(t)=e^t \quad \text{в} \quad (t_0, t_1)$$

и покажем, что тогда $g(z, t)$ удовлетворяет в (t_0, t_1) диференциальному уравнению

$$\frac{\partial g(z, t)}{\partial t}=\frac{\partial g(z, t)}{\partial z}\, z\,\frac{1+\varkappa(t)z}{1-\varkappa(t)z}, \tag{1}$$

где $\varkappa(t)$ — непрерывная функция от t и $|\varkappa(t)|=1$.

Действительно, функция

$$h(z, t', t'')=g^{-1}(g(z, t'), t'')=e^{t'-t''}(z+\ldots), \tag{2}$$

---

[1] Math. Ann., **89**, (1923).

[2] Mathematica, (1928).

при любых t', t'', $t' < t''$, отображает $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$ с разрезом по дуге Жордана. Следовательно, эта функция при указанных t' и t'' будет непрерывна в $|z| \leqslant 1$. Обозначив через $\lambda(t)$ точку на $|z| = 1$, которая при отображении $|z| \leqslant 1$ функцией $\zeta = g(z, t)$ переходит в конец разреза, лежащий внутри B, и рассуждая с $h(z, t', t'')$ дословно, как Löwner [3], докажем, что

$$\frac{h(z, t', t'') - z}{t'' - t'} \to z \, \frac{1 + \varkappa(t) z}{1 - \varkappa(t) z} \tag{3}$$

как при $t' = t$ и $t'' \to t$, так и при $t'' = t$ и $t' \to t$. Из рассуждений, кроме того, будет следовать, что $\lambda(t)$ непрерывна в (t_0, t_1). Подставляя (2) в (3), и получим (1).

Если B имеет более одной граничной точки, то по известной теореме сходимости, при $t \to t_1$, функция $g(z, t)$ сходится к функции $g(z, t_1)$, отображающей $|z| < 1$ на B. Исследуем случай, когда B имеет единственную граничную точку $\zeta = \infty$. Тогда, как легко показать, имеем $g'(0, t) \to \infty$ при $t \to t_1$ и следовательно, $t_1 = \infty$. Далее, имеем $g(z, t) \to \infty$ при $z \neq 0$ и $t \to \infty$. В частном случае, когда области B_t обладают свойством, что области B'_t, полученные из B_t преобразованием подобия $\zeta' = e^{-t}\zeta$, сходятся при $t \to \infty$ к некоторой области B', как к ядру (в смысле Каратеодори), то тогда $g(z, t)e^{-t}$ при $t \to \infty$ сходится в $|z| < 1$ к функции, отображающей $|z| < 1$ на области B'. Например, если разрез L таков, что при удалении точки ζ по L в ∞ ζ беспрерывно приближается к некоторому лучу, исходящему из начала, то функция $g(z, t)$, удовлетворяющая уравнению (1), удовлетворяет, кроме того, условию

$$\lim_{t \to \infty} g(z, t) e^{-t} = \frac{z}{(1 - \eta z)^2}, \quad |\eta| = 1. \tag{4}$$

Иначе обстоит дело с обратной функцией $g^{-1}(\zeta, t) = e^{-t}(\zeta + \ldots)$. Какова бы ни была кривая L, удаляющаяся в ∞, имеем для любого ζ из B

$$\lim_{t \to \infty} g^{-1}(\zeta, t) e^{t} = \zeta. \tag{5}$$

Действительно, по известной оценке модуля однолистных функций имеем

$$\frac{|z| e^t}{(1 + |z|)^2} \leqslant |g(z, t)| \leqslant \frac{|z| e^t}{(1 - |z|)^2},$$

откуда, положив $z = g^{-1}(\zeta, t)$, получаем

$$\frac{|g^{-1}(\zeta, t)| e^t}{(1 + |g^{-1}(\zeta, t)|)^2} \leqslant |\zeta| \leqslant \frac{|g^{-1}(\zeta, t)| e^t}{(1 - |g^{-1}(\zeta, t)|)^2}. \tag{6}$$

Левое неравенство дает $|g^{-1}(\zeta, t)| e^t \leqslant 4|\zeta|$. Но тогда из (6) следует

$$\lim |g^{-1}(\zeta, t)| e^t = 1,$$

причем сходимость равномерная в каждой замкнутой части B. Так как функция $\varphi_t(\zeta) = \log\left[\frac{g^{-1}(\zeta, t)}{\zeta} e^t\right]$ при t достаточно большом регулярна в любой замкнутой части B и по доказанному там $\mathcal{R}(\varphi_t(\zeta)) \to 1$ равномерно при $t \to \infty$, то из $\varphi_t(0) = 1$ следует, что имеет место и (5).

Положим теперь

$$f(z, t) = g^{-1}(g(z, t_0), t). \tag{7}$$

[3] См. цит. в сноске [1].

Функция $f(z, t)$ регулярна и однолистна в $|z|<1$ при всех t из (t_0, t_1) и по (1) удовлетворяет там диференциальному уравнению

$$\frac{\partial f(z, t)}{\partial t} = -f(z, t)\frac{1+\varkappa(t)f(z, t)}{1-\varkappa(t)f(z, t)} \tag{8}$$

и условию $f(z, t_0)=z$. Если B имеет более одной граничной точки, то, кроме того, будет

$$\lim_{t\to t_1} f(z, t)=f(z, t_1)=g^{-1}(g(z, t_0), t_1).$$

Если же B имеет единственную граничную точку $\zeta=\infty$, то из (5) следует

$$\lim_{t\to\infty} f(z, t)e^t=g(z, t_0), \tag{9}$$

т. е. последний предел дает функцию, отображающую $|z|<1$ на область B с полным разрезом L.

Отметим, что семейство функций $g(z, t)$, удовлетворяющих уравнению (1) и условию (4), уже было использовано при оценках коэфициентов однолистных функций [4]. Семейство функций $f(z, t)$ может быть с успехом использовано при получении оценок модулей и аргументов однолистных функций и их производных [5].

2°. Используя данное выше обобщение параметрического представления однолистных функций, докажем следующие теоремы:

Теорема 1. *Если функции* $f_1(z)$ *и* $f_2(z)$, $f_1(0)=f_2(0)=0$, $f_1'(0)>0$, $f_2'(0)>0$, *регулярны и однолистны в* $|z|<1$ *и* $\zeta=f_1(z)$ *отображает* $|z|<1$ *на область* B_1, *а* $\zeta=f_2(z)$ *отображает* $|z|<1$ *на область* B_2, *содержащуюся в* B_1, *но не совпадающую с* B_1, *то имеем*

$$|f_2(z)|<|f_1(z)| \quad \textit{при} \quad 0\leqslant|z|<r_0, \tag{10}$$

где r_0 — *корень уравнения*

$$\log\frac{1+r}{1-r}+2\operatorname{arc\,tg} r=\frac{\pi}{2}, \tag{11}$$

т. е. $r_0=0{,}39\ldots$. *Число* r_0 *нельзя заменить бо́льшим.*

Доказательство. Теорему достаточно доказать для случая, когда область B_2 ограничена кривой Жордана, целиком лежащей в B_1, ибо иначе рассмотрели бы функции $f_1(z)$ и $f_2(rz)$, $0<r<1$, доказали бы для них теорему и затем $r\to1$; причем в (10) знака равенства не будет, ибо иначе

$$\frac{f_2}{f_1}\equiv\text{const}=1,$$

т. е. B_2 совпадала бы с B_1. Но область B_2, ограниченную кривой Жордана лежащей в B_1, можно аппроксимировать областями $B_2^{(n)}$, полученными из B_1, проведением разрезов L типа 1°, в том смысле, что функции $f_{2,n}(z)$, $f_{2,n}(0)=0$, $f_{2,n}'(0)>0$, конформно отображающие $|z|<1$ на $B_2^{(n)}$, при $n\to\infty$ сходятся в $|z|<1$ к $f_2(z)$. Это в свою очередь показывает, что теорему достаточно до-

[4] См., например, Лаврентьев и Люстерник, Основы вариационного исчисления, т. I, ч. 2; Базилевич, Математический сборник, 1936—37 гг.; Ioh, Proceeding of the Phys. Math. Soc., Osaka, 1938.

[5] См., например, работы автора в Математическом сборнике за 1936—37 гг.

казать для случая, когда $f_2(z)$ отображает $|z|<1$ на область B_2, полученную из B_1 проведением разреза L типа 1°. В этом случае имеем

$$f_1(z)=g(z,\ t_1),\quad f_2(z)=g(z,\ t_0), \tag{12}$$

где $g(z,\ t)$ — функция из 1°, удовлетворяющая уравнению (1). Из уравнения (1), деля на $g(z,\ t)$ и взяв вещественные части, получаем

$$\frac{\partial |g|}{\partial t}=|g|\,R\left(\frac{zg'}{g}\,\frac{1+\varkappa z}{1-\varkappa z}\right), \tag{13}$$

где

$$g=g(z,\ t),\quad g'=\frac{\partial g(z,\ t)}{\partial z}.$$

Но по известной оценке [6] из теории однолистных функций имеем в $|z|<1$

$$\left|\arg\frac{zg'}{g}\right|\leqslant\log\frac{1+|z|}{1-|z|}. \tag{14}$$

Кроме того,

$$\left|\arg\frac{1+\varkappa z}{1-\varkappa z}\right|=|\arg(1-|z|^2-2i\,\mathfrak{J}\,(\varkappa z))|\leqslant\operatorname{arc\,tg}\frac{2|z|}{1-|z|^2}=2\operatorname{arc\,tg}|z|. \tag{15}$$

Следовательно,

$$\left|\arg\left(\frac{zg'}{g}\,\frac{1+\varkappa z}{1-\varkappa z}\right)\right|\leqslant\log\frac{1+|z|}{1-|z|}+2\operatorname{arc\,tg}|z|. \tag{16}$$

Все эти неравенства имеют место для аргументов, представляющих гармонические функции в $|z|<1$, равные нулю при $z=0$. Неравенство (16) показывает, что при

$$\log\frac{1+|z|}{1-|z|}+2\operatorname{arc\,tg}|z|<\frac{\pi}{2},$$

т. е. при $|z|<r_0$ в (13) правая часть будет >0 при всех t. Следовательно, $\frac{\partial |g|}{\partial t}>0$, т. е. $|g(z,\ t')|<|g(z,\ t'')|$ для любых t', t'', $t_0<t'<t''<t_1'$. При $t'\to t_0$ и $t''\to t_1$ получаем $|f_2(z)|<|f_1(z)|$.

Чтобы доказать, что для каждого z_0 из $|z|>r_0$ можно указать пары функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$, удовлетворяющих условиям леммы и для которых $|f_2(z_0)|>|f_1(z)|$, докажем существование непрерывной функции $\varkappa(t)$, $|\varkappa(t)|=1$, в $(0,\ \infty)$ такой, что для соответственной функции $g(z,\ t)$ при $z=z_0$ и $t=0$ в (16) будет иметь место знак равенства.

Для этого обратимся к уравнению (8), из которого получается оценка (14). Из него делением на f, диференцированием по z и дальнейшим делением на $\frac{f'}{f}$ получаем

$$\frac{\partial\log\frac{f'}{f}}{\partial t}=-\frac{2\varkappa f}{(1-\varkappa f)^2}. \tag{17}$$

С другой стороны, из (8), деля на f и взяв вещественные и мнимые части, получаем

$$\frac{\partial |f|}{\partial t}=-|f|\,\frac{1-|f|^2}{|1-\varkappa f|^2},\quad \frac{\partial\arg f}{\partial t}=-\frac{2\mathfrak{J}\,(\varkappa f)}{|1-\varkappa f|^2}. \tag{18}$$

Деля уравнение (17) на первое из (18), получим

$$d_t\log\frac{f'}{f}=\frac{\varkappa f d|f|}{(1-|f|^2)}\,\frac{|1-\varkappa f|^2}{(1-\varkappa f)^2}, \tag{19}$$

---

[6] См., например, Голузин, Математический сборник, 1936—37 гг.

откуда

$$\left| d_t \log \frac{f'}{f} \right| = \frac{-2d\,|f|}{1-|f|^2}. \tag{20}$$

Поскольку $|f|$ убывает с возрастанием t и, следовательно, $d\,|f| < 0$, равенство (20) показывает, что для того, чтобы при $z = z_0$ и всех $t > 0$ было

$$\left| d_t \arg \frac{f'}{f} \right| = -\frac{2d\,|f|}{1-|f^2|}, \tag{21}$$

нужно, чтобы при $z = z_0$ и всех t были $d_t \log \left| \frac{f'}{f} \right| = 0$, т. е. по (17), чтобы $\mathcal{R}\left(\frac{2\varkappa f}{(1-\varkappa f)^2}\right) = 0$ или $\mathcal{R}\left(\frac{(1-\varkappa f)^2}{2\varkappa f}\right) = 0$. Но из последнего равенства следует, что при $z = z_0$ и всех $t > 0$ должно быть

$$\varkappa f = |f|\, i\, \frac{1 - i\,|f|}{1 + i\,|f|}. \tag{22}$$

Вставляя это в (18), получаем систему уравнений, определяющих $|f|$ и $\arg f$, а следовательно, и f при $z = z_0$ в зависимости от t. Найдя же $|f|$, получаем из (22) и искомое $\varkappa(t)$, при котором имеет место (21). Подставляя выражение $\varkappa f$ из (22) в (19) и интегрируя от 0 до ∞, получим для соответственной функции $g(z, t)$

$$\arg \frac{zg'(z,\,0)}{g'(z,\,0)} = -\log \frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}. \tag{23}$$

С другой стороны, из (22) следует при $t \to 0$

$$\varkappa(0)\, z_0 = i\,|z_0|\, \frac{1 - i\,|z_0|}{1 + i\,|z_0|};$$

отсюда

$$\arg \frac{1 + \varkappa(0)\, z_0}{1 - \varkappa(0)\, z_0} = -2 \operatorname{arc\,tg} |z_0|. \tag{24}$$

Из (23) и (24) получаем

$$\arg \frac{z_0 g'(z_0, 0)}{g(z_0, 0)}\, \frac{1 + \varkappa(0)\, z_0}{1 - \varkappa(0)\, z_0} = -\log \frac{1+|z_0|}{1-|z_0|} - 2 \operatorname{arc\,tg}\, z_0. \tag{25}$$

Это показывает, что для z_0 с $|z_0|$ большим r_0, но достаточно близким к r_0, найденная функция $g(z, t)$ при t' и t'', $t' < t''$, достаточно близких к нулю, удовлетворяет неравенству $|g(z, t')| > |g(z, t'')|$, хотя $B_{t'} \subset B_{t''}$. Итак, при таких z_0 теорема не всегда верна.

Если бы теперь теорема была верна для какой-либо точки z_0, $|z_0| > r_0$, и для любых функций f_1 и f_2, удовлетворяющих условиям теоремы, то тогда, рассматривая функции $e^{\alpha i} f_1(e^{-\alpha i} z)$ и $e^{\alpha i} f_2(e^{-\alpha i} z)$, докажем ее справедливость и для всех точек $z_0 e^{\alpha i}$, $0 \leqslant \alpha < 2\pi$, т. е. на $|z| = |z_0|$. Но тогда по принципу модуля, примененному к $\frac{f_2}{f_1}$, заключили бы о справедливости ее и для $|z| \leqslant |z_0|$, что по доказанному выше будет не всегда. Теорема 1 таким образом доказана.

Теорема 2. *При условиях теоремы* 1 *в* $|z| < 0{,}1$ *имеем*

$$|f_2'(z)| < |f_1'(z)|. \tag{26}$$

Доказательство. Так же, как и выше, теорему 2 достаточно доказать для случая, когда область B_2 получается из B_1 проведением разреза типа f.

Но в этом случае из уравнения (1), диференцируя по z, имеем

$$\frac{\partial g'}{\partial t} = g''(z)\frac{1+\varkappa z}{1-\varkappa z} + g'\frac{1+2\varkappa z-\varkappa^2 z^2}{(1-\varkappa^2)^2}.$$

Отсюда, деля на g' и взяв вещественные части, получим

$$\frac{\partial |g'|}{\partial t} = \mathcal{R}\left(\frac{1+\varkappa z}{1-\varkappa z}\left(\frac{zg''}{g'} + \frac{2\varkappa z}{(1-\varkappa^2 z)^2} + 1\right)\right). \tag{27}$$

Но

$$\left|\arg\frac{1+\varkappa z}{1-\varkappa z}\right| \leqslant 2\operatorname{arc\,tg}|z|. \tag{28}$$

Далее, по известной оценке из теории однолистных функций[7] имеем

$$\left|\frac{zg''}{g'}\right| \leqslant \frac{4|z|+2|z|^2}{1-|z|^2}$$

и, следовательно,

$$\left|\frac{zg''}{g'} + \frac{2\varkappa z}{1-\varkappa^2 z^2}\right| \leqslant \frac{6|z|+2|z|^2}{1-|z|^2}. \tag{29}$$

Отсюда следует, что если правая часть меньше единицы, то

$$\arg\left(1+\frac{2\varkappa z}{1-\varkappa^2 z^2}+\frac{2g''}{g'}\right) \leqslant \arcsin\frac{6|z|+2|z|^2}{1-|z|^2}. \tag{30}$$

Из (29) и (30) следует, что правая часть в (27) будет положительна, если

$$2\operatorname{arc\,tg}|z| + \arcsin\frac{6|z|+2|z|^2}{1-|z|^2} \leqslant \frac{\pi}{2},$$

что наверное будет при $|z|<\frac{1}{10}$, и при $|z|<\frac{1}{10}$ правая часть в (29) меньше 1. Следовательно, при $|z|<\frac{1}{10}$ и при всех t из (t_0, t_1) будет $\frac{\partial |g'|}{\partial t}>0$, т. е. $|g'(z', t')|<|g'(z, t'')|$ при $t_0<t'<t''<t_1$. При $t'\to t_0$ $t''\to t_1$ это дает $|f_2'(z)|\leqslant|f_1'(z)|$; знак равенства не может быть, ибо иначе $\frac{f_2'(z)}{f_1'(z)}\equiv \text{const} = \frac{f_2'(0)}{f_1'(0)} = 1$. Теорема 2 доказана. Наибольший круг $|z|<r_1$, в котором имеет место (26) при условиях теоремы 1, неизвестен.

(Поступило в редакцию 22/VI 1939 г.)

Zur Theorie der schlichten Funktionen

G. M. Golusin (Leningrad)

(Résumé)

In dieser Note gibt der Autor eine Verallgemeinerung der parametrischen Darstellung von Löwner für schlichte Funktionen, die sodann zum Beweise einiger Vertiefungen des Lindelöfschen Prinzips angewandt wird.

---

[7] См., например, Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie, 1927, Bd. 2, S. 87.