1943 МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК Т. 13 (55), N. 1
RECUEIL MATHÉMATIQUE

Об однопараметрических семействах аналитических функций

П. П. Куфарев (Томск)

Счетную или континуальную последовательность функций $f_t(z)$, определенных в некоторой области G_z плоскости комплексного переменного z, можно рассматривать как функцию $F(z, t)$ двух переменных: комплексного переменного z и вещественного переменного t, определенную при $z \subset G_z$, $t \subset P_t$, где P_t — некоторое множество значений t, принадлежащее, скажем, сегменту $a \leqslant t \leqslant b$ [1].

При этой интерпретации последовательности, или, иначе говоря, однопараметрического семейства функций $f_t(z)$, каждая теорема о последовательности функций $f_t(z)$ может быть выражена как теорема о свойствах функции $F(z, t)$. В частности, многие теоремы о сходимости последовательностей оказываются эквивалентными теоремам о функции $F(z, t)$, в которых при определенных предположениях устанавливается непрерывность $F(z, t)$ по отношению к переменной t. Так, например, теорема Каратеодори о ядре последовательности областей в этой формулировке утверждает, что при условии сходимости последовательности областей $B_w(t)$ к содержащему точку $w=0$ ядру $B_w(t_0)$ функция $w=F(z, t)$, $F(0, t)=0$, $F'_z(0, t)>0$, отображающая G_z на $B_w(t)$, равномерно относительно z внутри [2] G_z непрерывна в t при $t=t_0$.

Такое выражение теорем о сходимости последовательностей функций само по себе, очевидно, является почти тавтологией. Однако, в связи с этим возникают другие вопросы, постановка которых непосредственно для последовательностей функций представляется, во всяком случае, менее естественной и которые могут иметь применение в некоторых задачах теории аналитических функций.

Одним из таких вопросов является вопрос об условиях существования производной от $F(z, t)$ по переменной t и о свойствах этой производной. В данной работе рассматриваются некоторые простейшие положения, связанные с этим вопросом.

---

[1] Ср. Р. Бэр, Теория разрывных функций, стр. 15, 1939.

[2] т. е. во всякой замкнутой области, внутренней для G_z.

ГЛАВА I

§ 1

Обозначим через S_t сегмент $a \leqslant t \leqslant b$. Пусть каждому значению $t \subset S_t$ соответствует в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ некоторая односвязная однолистная область $G_z(t)$, не содержащая точек $z = \infty$ и $z = c \neq \infty$.

В дальнейшем повсюду будут рассматриваться функции $F(z, t)$, определенные и регулярные относительно z при $t \subset S_t$, $z \subset G_z(t)$. Будем предполагать, что существует круг $|z| < \rho_0$, принадлежащий каждой области $G_z(t)$. Обозначим через $G_z(t, r)$ область, которая соответствует кругу $|\zeta| < r$, $r < 1$, при конформном отображении $G_z(t)$ на круг $|\zeta| < 1$, переводящем точку $z = 0$ в $\zeta = 0$.

Пусть, далее, P_t — некоторое бесконечное множество значений t сегмента S_t и t_0 — одна из предельных точек множества P_t. Назовем ядром $G_z^*(t_0; P_t)$ семейства областей $G_z(t)$ при $t \to t_0$ по P_t наибольшую из односвязных областей G_z', обладающих следующим свойством: каков бы ни был континуум $\overline{K}_z$, содержащий точку $z = 0$ и принадлежащий G_z', можно указать такое число $\delta(\overline{K}_z) > 0$, что при $|t - t_0| < \delta$, $t \subset P_t$ каждая область $G_z(t)$ содержит $\overline{K}_z$ [1].

§ 2

В этих обозначениях можно высказать известную теорему Витали в следующей необходимой для дальнейшего форме:

Теорема 1. *Пусть:*

1) *какова бы ни была замкнутая область $\overline{K}_z'$, внутренняя к $G_z^*(t_0; P_t)$, можно указать такие числа $\delta' > 0$ и $M' < \infty$, что при $|t - t_0| < \delta'$, $t \subset P_t$ и $z \subset \overline{K}_z'$,*

$$|F(z, t)| < M', \tag{1}$$

2) *существует такое бесконечное множество E_z, лежащее вместе со своими предельными точками полностью внутри $G_z^*(t_0; P_t)$ [2], что при каждом (фиксированном) $z \subset E_z$ $F(z, t)$ стремится к определенному пределу при $t \to t_0$ по P_t.*

Тогда при $t \to t_0$ по P_t

$$\lim F(z, t) = \varphi(z, t_0; P_t) \tag{2}$$

существует при всяком $z \subset G_z^*(t_0; P_t)$, причем $F(z, t)$ стремится к $\varphi(z, t_0; P_t)$ равномерно относительно z внутри $G_z^*(t_0; P_t)$.

В частности, если $t_0 \subset P_t$ и $\varphi(z, t_0; P_t) = F(z, t_0)$ при $z \subset E_z$, то $F(z, t)$ равномерно относительно z внутри $G_z^*(t_0; P_t)$ непрерывна в t на P_t при $t = t_0$.

---

[1] См. К. Каратеодори, Конформное отображение, стр. 91, 1934.

[2] В дальнейшем будем называть такое множество полностью внутренним к $G_z^*(t_0; P_t)$.

§ 3

В следующих теоремах через $D_{P_t}F(z, t)$ обозначается производная $\frac{\partial F(z, t)}{\partial t}$ по множеству P_t [1]. Множество P_t предполагается измеримым.

Теорема 2. *Пусть, каково бы ни было $r < 1$, при любых $t_1 \subset P_t$, $t_2 \subset P_t$ и $z \subset G_z(t_1, r) \cdot G_z(t_2, r)$ выполняется неравенство*

$$|F(z, t_1) - F(z, t_2)| < A(r)|t_2 - t_1|, \quad A(r) < \infty. \tag{3}$$

Тогда:

1) *почти для всех $t \subset P_t$ производная $D_{P_t}F(z, t)$ существует при всяком $z \subset G_z^*(t; P_t)$* [2],

2) *если, для данного $t = t_0 \subset P_t$, $D_{P_t}F(z, t)$ существует при $t = t_0$, $z \subset E_z$, где E_z — некоторое множество, полностью внутреннее к $G_z^*(t_0; P_t)$, то: α) $D_{P_t}F(z, t)$ существует при $t = t_0$ и всяком $z \subset G_z^*(t_0; P_t)$ и является регулярной в $G_z^*(t_0; P_t)$ функцией от z; β) при стремлении t к t_0 по P_t функция*

$$\frac{F(z, t) - F(z, t_0)}{t - t_0}$$

стремится к $D_{P_t}F(z, t)$ равномерно относительно z внутри $G_z^*(t_0; P_t)$[3].

Доказательство. Предложение 2) непосредственно следует из (3) и теоремы 1 [4]. Таким образом, требуется доказать лишь предложение 1).

Все области содержат круг $|z| < \rho_0$. По лемме Шварца отсюда следует, что круг $|z| < \rho_0'$, $\rho_0' < \rho_0$, принадлежит всем областям $G_z\left(t, \frac{\rho_0'}{\rho_0}\right)$ [5].

Пусть

$$E_z: \quad z_1, z_2, z_3, \ldots$$

— некоторое множество значений z, принадлежащее кругу $|z| < \rho_0'$. Функция

$$\psi_k(t) = F(z_k, t) \quad (k = 1, 2, 3, \ldots), \tag{4}$$

---

[1] См. Г. Лебег, Интегрирование и отыскание примитивных функций, стр. 198, 1934.

[2] Если $\operatorname{mes} P_t = 0$, то предложение 1) следует откинуть, как ничего не выражающее.

[3] В дальнейшем свойства α), β) будем выражать коротко фразой: «при $t = t_0$ $F(z, t)$ дифференцируема в t по P_t равномерно относительно z внутри $G_z^*(t_0; P_t)$». (Регулярность $[D_{P_t}F(z, t)]_{t=t_0}$ можно не отмечать в формулировке, так как это свойство следует из β) по теореме Вейерштрасса.)

[4] Для данной замкнутой области $\overline{K_z'}$, внутренней к $G_z^*(t_0; P_t)$, можно указать такие числа $\delta' > 0$ и $r' < 1$, что при $|t - t_0| < \delta'$, $t \subset P_t$, каждая область $G_z(t, r')$ содержит $\overline{K_z'}$. Это легко показать, пользуясь леммой Шварца и определением ядра (ср. ниже).

[5] См. К. Каратеодори, Конформное отображение, стр. 59.

по (3), удовлетворяет на P_t условию Липшица

$$|\psi_k(t_1)-\psi_k(t_2)|<A\left(\frac{\rho_0'}{\rho_0}\right)|t_1-t_2| \tag{5}$$

и, следовательно, имеет на P_t ограниченную производную по P_t всюду, за исключением множества $p_t^{(k)}$ меры нуль (которое может быть и пустым)[1]. Поэтому при всяком $t\subset\tilde{P}_t=P_t-\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_t^{(k)}$, $\operatorname{mes}\tilde{P}_t=\operatorname{mes}P_t$, и при любом k $(k=1, 2, 3, \ldots)$ существует предел

$$\lim\frac{F(z_k, t+u)-F(z_k, t)}{u}=D_{P_t}\psi(t), \tag{6}$$

когда u стремится к нулю по множеству

$$\pi_u:\quad a-t\leqslant u\leqslant b-t,\quad u\neq 0,\quad t+u\subset P_t.$$

Положим, что $t\subset\tilde{P}_t$. Обозначим через $H_z(u)$ ту из связных частей области $G_z(t)\cdot G_z(t+u)$, которая содержит круг $|z|<\rho_0$. Как легко видеть, при $u\to 0$ по π_u области $H_z(u)$ имеют ядром $G_z^{\bullet}(t;\ P_t)$.

Рассмотрим теперь функцию

$$f(z, u)=\frac{F(z, t+u)-F(z, t)}{u}. \tag{7}$$

При $u\subset\pi_u$, $z\subset H_z(u)$, $f(z, u)$, в силу (3) и (6), удовлетворяет условиям теоремы 1. Применяя эту теорему, заключаем, что

$$D_{P_t}F(z, t)=\lim_{u\to 0,\ u\subset\pi_u}f(z, u) \tag{8}$$

существует при всяком $z\subset G_z^{\bullet}(t;\ P_t)$. Так как $\operatorname{mes}(P_t-\tilde{P}_t)=0$, то предложение 1) доказано.

§ 4

Теорема 3. *Пусть вещественная часть функции*

$$F(z, t)=U(z, t)+iV(z, t) \tag{9}$$

при любых $t_1\subset P_t$, $t_2\subset P_t$, $t_1<t_2$, и $z\subset G_z(t_1)\cdot G_z(t_2)$ удовлетворяет неравенству

$$U(z, t_1)<U(z, t_2), \tag{10}$$

и пусть при $t\subset P_t$

$$V(0, t)=0. \tag{11}$$

[1] См. Н. Лузин, Интеграл и тригонометрический ряд, Матем. сб., XXX : 1 (1916), 141—146 и 70—72.

Тогда:

1) *если при данном $t \subset P_t$ $F(z, t)$ непрерывна в t относительно множества P_t хотя бы при одном значении $z \subset G_z^*(t; P_t)$, то она непрерывна в t относительно P_t и при всяком $z \subset G_z^*(t; P_t)$ и притом равномерно относительно z внутри $G_z^*(t; P_t)$,*

2) *множество значений $t \subset P_t$, при которых $F(z, t)$ разрывна в t (относительно P_t) при $z \subset G_z^*(t; P_t)$, не более чем счетно.*

Доказательство. Фиксируем произвольное $t_0 \subset P_t$ и произвольную замкнутую область $\overline{K_z}$, внутреннюю для $G_z^*(t_0; P_t)$. По определению ядра существует такое $\eta(K_z) > 0$, что при $|t - t_0| < \eta$, $t \subset P_t$, $F(z, t)$ определена в K_z и, следовательно, при $|t_1 - t_0| < \eta$, $|t_2 - t_0| < \eta$, $t_1 \subset P_t$, $t_2 \subset P_t$, и всяком $z \subset K_z$ выполняется неравенство (10).

Положим для определенности, что t_0 есть двусторонняя предельная точка множества P_t (для односторонней предельной точки рассуждения аналогичны). Пусть $t \to t_0$ по P_t, монотонно возрастая. Тогда, при $|t - t_0| < \eta$, последовательность гармонических в K_z функций $U(z, t)$, удовлетворяющая, в силу (10), условиям теоремы Гарнака, равномерно внутри K_z сходится к гармонической в K_z предельной функции. Так как $V(0, t) = 0$, то, применяя известную теорему[1] и учитывая затем произвольность выбора области K_z, заключаем, что последовательность функций $F(z, t)$, при $t \to t_0$ по P_t слева, равномерно внутри $G_z^*(t_0; P_t)$ сходится к регулярной в $G_z^*(t_0; P_t)$ предельной функции

$$F(z, t_0 - 0) = U(z, t_0 - 0) + iV(z, t_0 - 0). \tag{12}$$

Аналогично, при $t \to t_0$ по P_t справа, $F(z, t)$ равномерно относительно z внутри $G_z^*(t_0; P_t)$ стремится к регулярной в $G_z^*(t_0; P_t)$ функции $F(z, t_0 + 0)$. При этом из (10) следует, что при $z \subset G_z^*(t_0; P_t)$

$$U(z, t_0 - 0) \leq U(z, t_0) \leq U(z, t_0 + 0). \tag{13}$$

Предположим теперь, что $F(z, t)$ непрерывна в t относительно P_t при $t = t_0$ и некотором $z = z_0 \subset G_z^*(t_0; P_t)$. Тогда неотрицательная гармоническая в $G_z^*(t_0; P_t)$ функция

$$U(z, t_0 + 0) - U(z, t_0 - 0)$$

равна нулю при $z = z_0$ и, следовательно, по принципу максимума, тождественно равна нулю в $G_z^*(t_0; P_t)$. Значит, по (13), $U(z, t)$, а вместе с тем и $F(z, t)$, равномерно относительно z внутри $G_z^*(t_0; P_t)$ непрерывна в t на P_t при $t = t_0$. Первое утверждение теоремы доказано.

Отсюда уже непосредственно вытекает, что множество значений $t \subset P_t$, при которых $F(z, t)$ разрывна в t (на P_t), тождественно с множеством точек разрыва монотонно возрастающей на P_t функции $F(0, t) = U(0, t)$ и, следовательно, не более чем счетно.

[1] См. Р. Курант, Геометрическая теория функций комплексной переменной, стр. 100, 1934.

§ 5

Ограничимся в дальнейшем случаем, когда $P_t \equiv S_t$. Имея целью исследовать вопрос о существовании производной $\frac{\partial F(z, t)}{\partial t}$ от функции, удовлетворяющей условиям теоремы 3 (при $P_t \equiv S_t$), рассмотрим прежде всего функцию

$$\tau = U(0, t) = \tau(t). \tag{14}$$

$\tau(t)$ монотонно возрастает на S_t [см. (10)] и поэтому имеет почти всюду на S_t конечную производную $\tau'(t)$.

Обозначим (выполняя каким-либо образом нумерацию) точки разрыва $\tau(t)$ на S_t через $t_1, t_2, t_3, \ldots$ Далее, введем обозначения

$$\tau_k = \tau(t_k), \quad \tau'_k = \tau(t_k - 0), \quad \tau''_k = \tau(t_k + 0), \tag{15}$$

$$\alpha = \tau(a), \qquad \beta = \tau(b). \tag{16}$$

Множество P_τ значений, принимаемых функцией $\tau(t)$ на S_t, принадлежит сегменту $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$ и получается из этого сегмента путем вычитания счетного множества сегментов $\tau'_k \leqslant \tau \leqslant \tau''_k$ с выключенной точкой τ_k.

Функция

$$t = \psi(\tau), \tag{17}$$

обратная $\tau(t)$, определена, монотонно возрастает и непрерывна на P_τ.

Определим, далее, при $\tau \subset P_\tau$, $z \subset \widetilde{G}_z(\tau) \equiv G_z(\psi(\tau))$ функцию $\Phi(z, \tau)$ равенством

$$\Phi(z, \tau) = F(z, \psi(\tau)). \tag{18}$$

Из свойств функции $F(z, t)$ [1] следует, что

a) при любом $\tau \subset P_\tau$ $\Phi(z, \tau)$ является регулярной в $\widetilde{G}_z(\tau)$ функцией от z,

b) при любых $\tau' \subset P_\tau$, $\tau'' \subset P_\tau$, $\tau' < \tau''$, и $z \subset \widetilde{G}_z(\tau') \cdot \widetilde{G}_z(\tau'')$

$$\Re[\Phi(z, \tau')] < \Re[\Phi(z, \tau'')], \tag{19}$$

c) $$\Phi(0, \tau) = \tau, \tag{20}$$

d) при $\tau \subset P_\tau$, $z \subset \widetilde{G}_z(\tau)$ $\Phi(z, \tau)$ равномерно относительно z внутри $G^*_z(\tau; P_\tau)$ [2] непрерывна в τ на множестве P_τ [3].

Докажем теперь следующую теорему:

Теорема 4. *Пусть $F(z, t)$ удовлетворяет условиям теоремы* 3 *(при $P_t \equiv S_t$). Тогда:*

---

[1] См. теорему 3.

[2] $\widetilde{G}^*_z(\tau; P_\tau) \equiv G^*_z(\psi(\tau); S_t)$.

[3] См. (20) и теорему 3.

1) *почти для всех* $t \subset S_t$ *производная* $\frac{\partial F(z, t)}{\partial t}$ *существует при всяком* $z \subset G_z^*(t)$ [1],

2) *если при данном* $t = t_0 \subset S_t$, $\left[\frac{\partial F(z, t)}{\partial t}\right]_{t=t_0}$ *существует при всяком* $z \subset E_z$, *где* E_z — *полностью внутреннее к* $G_z^*(t_0)$ *и содержащее точку* $z = 0$ *множество значений* z, *то* $F(z, t)$ *равномерно относительно* z *внутри* $G_z^*(t_0)$ *дифференцируема по* t; *при этом*

$$\Re\left[\frac{\partial F(z, t)}{\partial t}\right]_{t=t_0} > 0 \tag{21}$$

или

$$\left[\frac{\partial F(z, t)}{\partial t}\right]_{t=t_0} \equiv 0 \tag{22}$$

при $z \subset G_z^*(t_0)$.

Доказательство. Сначала докажем, что теорема справедлива для соответствующей функции $\Phi(z, \tau)$, если, конечно, заменить в формулировке теоремы S_t на P_τ и рассматривать вместо обычной производной производную по множеству P_τ.

Фиксируем произвольное $\tau_0 \subset P_\tau$, $\tau_0 \neq \tau_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ [см. (15)], и произвольную односвязную замкнутую область K_z, внутреннюю для $\widetilde{G}_z^*(\tau_0; P_\tau)'$ и содержащую $z = 0$. Существует такое $\eta(K_z) > 0$, что при $|\tau - \tau_0| < \eta$, $\tau \subset P_\tau$ и $z \subset K_z$ $\Phi(z, \tau)$ определена и регулярна в z. При $|\tau' - \tau_0| < \eta$, $|\tau'' - \tau_0| < \eta$, $\tau' \subset P_\tau$, $\tau'' \subset P_\tau$, регулярная в K_z функция

$$\frac{\Phi(z, \tau') - \Phi(z, \tau'')}{\tau' - \tau''},$$

в силу свойств b), c) функции $\Phi(z, \tau)$, имеет в K_z положительную вещественную часть и равна единице при $z = 0$. Отсюда, по известной теореме [2], следует, что во всякой области K_z', полностью внутренней для K_z,

$$\left|\frac{\Phi(z, \tau') - \Phi(z, \tau'')}{\tau' - \tau''}\right| \leqslant \frac{1 + r(K_z', K_z)}{1 - r(K_z', K_z)}, \quad r(K_z', K_z) < 1\,[3]. \tag{23}$$

Таким образом, при $|\tau - \tau_0| < \eta$, $\tau \subset P_\tau$ и $z \subset K_z$ функция $\Phi(z, \tau)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.

Пусть теперь $[D_{P_\tau}\Phi(z, \tau)]_{\tau=\tau_0}$ существует при всяком $z \subset E_z$, где E_z — полностью внутреннее к $G_z^*(\tau_0; P_\tau)$ и содержащее точку $z = 0$ множество значений z. Можно считать, что K_z содержит предельные точки множества E_z. Тогда, по теореме 2, заключаем, что $\Phi(z, \tau)$ равномерно

---

[1] $G_z^*(t_0) \equiv G_z^*(t_0; S_t)$.

[2] См. К. Каратеодори, Конформное отображение, § 74, стр. 55, 1934.

[3] За $r(K_z', K_z)$ можно взять радиус наименьшего из кругов $|\zeta| < r$, содержащих отображение области K_z' при конформном отображении $\zeta = f(z)$, $f(0) = 0$, области K_z на круг $|\zeta| < 1$.

относительно z внутри K_z дифференцируема в τ на P_τ при $\tau=\tau_0$. При этом, так как гармоническая в K_z функция $\Re\,[D_{P_\tau}\Phi(z,\tau)]_{\tau=\tau_0}$ определяется как предел положительных и равных 1 при $z=0$ функций

$$\Re\left[\frac{\Phi(z,\tau)-\Phi(z,\tau_0)}{\tau-\tau_0}\right],$$

то, по принципу максимума,

$$\Re\,[D_{P_\tau}\Phi(z,\tau)]_{\tau=\tau_0}>0. \tag{24}$$

В силу произвольности выбора области $K_z\subset\tilde{G}_z^*(\tau_0;\,P_\tau)$ второе утверждение теоремы доказано.

После этого утверждение 1) теоремы становится очевидным. Действительно, при $|z|<\rho_0$ и всяком $\tau\subset P_\tau$ $\Phi(z,\tau)$ определена и регулярна в z. Так же, как выше, отсюда следует; что при $|z|<\rho_0'$, $\rho_0'<\rho_0$, и при любых $\tau'\subset P_\tau$, $\tau''\subset P_\tau$

$$\left|\frac{\Phi(z,\tau')-\Phi(z,\tau'')}{\tau'-\tau''}\right|<\frac{1+\frac{\rho_0'}{\rho_0}}{1-\frac{\rho_0'}{\rho_0}}. \tag{25}$$

Следовательно, при $|z|<\rho_0$, $\tau\subset P_\tau$, $\Phi(z,\tau)$ удовлетворяет условиям теоремы 2, и поэтому почти для всех $\tau\subset P_\tau$ $D_{P_\tau}\Phi(z,\tau)$ существует при всяком z, $|z|<\rho_0$. Но тогда из утверждения 2) вытекает, что $D_{P_\tau}\Phi(z,\tau)$ при этих значениях τ существует и регулярна в z не только при $|z|<\rho_0$, но и при всяком $z\subset\tilde{G}_z^*(\tau;\,P_\tau)$.

Переходим к доказательству теоремы для $F(z,t)$. Пусть π_τ — множество всех таких значений $\tau_0\subset P_\tau$, что $[D_{P_\tau}\Phi(z,\tau)]_{\tau=\tau_0}$ не существует при $z\subset\tilde{G}_z^*(\tau_0;\,P_\tau)$ или существует только для множества значений $z\subset\tilde{G}_z^*(\tau_0;\,P_\tau)$, не имеющего предельных точек внутри $\tilde{G}_z^*(\tau_0;\,P_\tau)$. По предыдущему, $\operatorname{mes}\pi_\tau=0$. Обозначим, далее, через s_t множество тех точек сегмента S_t, в которых не существует производная $\tau'(t)$.

Рассмотрим два случая:

1) Пусть мера множества p_t, соответствующего множеству π_τ при отображении P_τ на S_t функцией $t=\psi(\tau)$, равна нулю. При всяком $t\subset S_t-(p_t+s_t)$ производная

$$\frac{\partial F(z,t)}{\partial t}=\lim_{t'\to t}\frac{F(z,t')-F(z,t)}{t'-t}=\lim_{t'\to t}\frac{\Phi(z,\tau(t'))-\Phi(z,\tau(t))}{\tau(t')-\tau(t)}\cdot\frac{\tau(t')-\tau(t)}{t'-t} \tag{26}$$

существует для всех $z\subset G_z^*(t)$ и равна

$$\frac{\partial F(z,t)}{\partial t}=[D_{P_\tau}\Phi(z,\tau)]_{\tau=\tau(t)}\cdot\tau'(t). \tag{27}$$

2) Пусть мера множества p_t не равна нулю. Тогда производная $\tau'(t)$ монотонно возрастающей функции $\tau(t)$ равна нулю почти всюду на p_t[1]. Поэтому и по (26), (23) почти при всяком $t \subset p_t$ и при $z \subset G_z^*(t)$

$$\frac{\partial F(z,\ t)}{\partial t} \equiv 0. \tag{22}$$

С другой стороны, при $t \subset S_t - (p_t + s_t)$, $z \subset G_z^*(t)$, попрежнему имеет место формула (27). Таким образом, и в этом случае $\frac{\partial F(z,\ t)}{\partial t}$ почти для всех $t \subset S_t$ существует при $z \subset G_z^*(t)$. Первое предложение теоремы доказано.

Далее, пусть при данном $t = t_0 \subset S_t$ $\left[\frac{\partial F(z,\ t)}{\partial t}\right]_{t=t_0}$ существует для всех $z \subset E_z$, где E_z — некоторое множество, полностью внутреннее к $G_z^*(t_0)$ и содержащее $z=0$. Тогда, в частности, существует

$$\tau'(t_0) = \left[\frac{dF(0,\ t)}{dt}\right]_{t=t_0}. \tag{28}$$

Рассмотрим опять два случая.

1) Пусть $\tau'(t_0) \neq 0$. Тогда [см. (26)] существует также при всяком $z \subset E_z$ $[D_{P_\tau}\Phi(z,\ \tau)]_{\tau=\tau(t_0)}$. Следовательно[2]; $[D_{P_\tau}\Phi(z,\ t)]_{\tau=\tau(t_0)}$ существует при всяком $z \subset G_z^*(t_0)$. Но в таком случае из (26) следует, что $\left[\frac{\partial F(z,\ t)}{\partial t}\right]_{t=t_0}$ существует также при всяком $z \subset G_z^*(t_0)$ и имеет место формула (27). Далее, так как разность

$$\frac{\Phi(z,\ \tau(t)) - \Phi(z,\ \tau(t_0))}{\tau(t) - \tau(t_0)} - [D_{P_\tau}\Phi(z;\ \tau)]_{\tau=\tau(t_0)}$$

при $t \to t_0$ стремится к нулю равномерно относительно z внутри $G_z^*(t_0)$ и, с другой стороны [см. (23)], во всякой замкнутой области K, внутренней к $G_z^*(t_0)$, $[D_{P_\tau}\Phi(z,\ \tau)]_{\tau=\tau(t_0)}$ ограничена, то и разность

$$\begin{aligned} &\frac{F(z,\ t) - F(z,\ t_0)}{t - t_0} - \left[\frac{\partial F(z,\ t)}{\partial t}\right]_{t=t_0} = \\ &= \frac{\tau(t) - \tau(t_0)}{t - t_0}\left\{\frac{\Phi(z,\ \tau(t)) - \Phi(z,\ \tau(t_0))}{\tau(t) - \tau(t_0)} - [D_{P_\tau}\Phi(z,\ \tau)]_{\tau=\tau(t_0)}\right\} + \\ &+ [D_{P_\tau}\Phi(z;\ \tau)]_{\tau=\tau(t_0)}\left\{\frac{\tau(t) - \tau(t_0)}{t - t_0} - \tau'(t_0)\right\} \end{aligned} \tag{29}$$

стремится к нулю при $t \to t_0$ равномерно относительно z внутри $G_z^*(t_0)$. Кроме того, из (27) и (24) следует, что

$$\Re\left[\frac{\partial F(z,\ t)}{\partial t}\right]_{t=t_0} > 0. \tag{21}$$

[1] См., например, C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen, § 498, Satz 2, § 503, Satz 3, § 505, Satz 6. Berlin, 1918.

[2] Напомним, что для $\Phi(z,\ \tau)$ теорема уже доказана.

2) Пусть $\tau'(t_0)=0$. Тогда из (26) и (23) следует, что

$$\frac{F(z,t)-F(z,t_0)}{t-t_0}$$

при $t\to t_0$ равномерно относительно z внутри $G_z^*(t)$ стремится к нулю. Теорема доказана.

Примечание 1. Из доказательства теорем 3, 4 ясно, что эти теоремы остаются справедливыми и в случае, когда в (10) допускается знак равенства.

Примечание 2. Пусть $F(z,t)$ удовлетворяет условиям теоремы 4, и пусть, кроме того, при любых $t_1\subset S_t$, $t_2\subset S_t$, $t_1<t_2$,

$$G_z(t_1)\subset G_z(t_2).$$

Тогда при $t_1<t_2$ и $z\subset G_z(t_1,r)$ выполняется неравенство

$$|F(z,t_1)-F(z,t_2)|\leqslant\frac{1+r}{1-r}|F(0,t_1)-F(0,t_2)|. \tag{30}$$

Действительно, при $\tau>\tau(t_1)$, $\tau\subset P_\tau$; функция $\Phi(z,\tau)$ определена в $G_z(t_1)$. Отсюда, повторяя доказательство неравенства (23) для случая, когда $K_z\equiv G_z(t_1)$, заключаем, что при $z\subset G_z(t_1,r)$, $r<1$, выполняется неравенство

$$|\Phi(z,\tau)-\Phi(z,\tau(t_1))|\leqslant\frac{1+r}{1-r}|\tau-\tau(t_0)|,$$

эквивалентное (30) в силу (18), (14), (11).

§ 6

Теорема 5. *Пусть:*

1) *при $t\subset S_t$ область $G_z(t)$ принадлежит кругу $|z|<R<\infty$,*

2) *функция $w=F(z,t)$ при любом $t\subset S_t$ конформно отображает $G_z(t)$ на односвязную однолистную область $B_w(t)$, содержащую круг $|w|<\mu_0$ и принадлежащую кругу $|w|<M$.*

При этих условиях, если $w=F(z,t)$ непрерывна в t при $t=t_0$, $z\subset G_z^*(t_0)$, то и функция $z=\Phi(w,t)$, обратная $F(z,t)$, равномерно относительно w внутри $B_w^*(t_0)$ непрерывна в t при $t=t_0$.

Доказательство теоремы легко выполнить, опираясь на теорему 1 и известное интегральное представление для обратной функции [1].

Теорема 6. *Пусть выполняются условия 1), 2) теоремы 5, и пусть, кроме того, $w=F(z,t)$ равномерно относительно z внутри $G_z^*(t_0)$ дифференцируема по t при $t=t_0$. Тогда функция $z=\Phi(w,t)$ также равно-*

[1] См. А. Гурвиц, Теория аналитических и эллиптических функций, стр. 182, М.—Л., 1933.

мерно относительно w *внутри* $B_w^*(t_0)$ *дифференцируема по* t *при* $t=t_0$ *и*

$$\left[\frac{\partial\Phi(w, t)}{\partial t}\right]_{t=t_0} = -\frac{\partial\Phi(w, t_0)}{\partial w}\left[\frac{\partial F(\Phi(w, t_0), t)}{\partial t}\right]_{t=t_0}. \tag{31}$$

Доказательство. Фиксируем произвольную замкнутую область $\overline{K}_w$, внутреннюю для $B_w^*(t_0)$, и построим область K'_w, содержащую $\overline{K}_w$ и лежащую полностью внутри $B_w^*(t_0)$. Так как, очевидно, $F(z, t)$ равномерно относительно z внутри $G_z^*(t_0)$ непрерывна в t при $t=t_0$, то, по теореме 5, $\Phi(w, t)$ равномерно относительно w в K'_w непрерывна в t при $t=t_0$, и поэтому семейство областей $R'_z(t)$ [соотв., $R_z(t)$], на которые (при достаточно малом $|t-t_0|$) отображается K'_w (соотв., K_w) функцией $z=\Phi(w, t)$, сходится при $t\to t_0$ как к ядру к области $R'_z(t_0)$ [соотв., $R_z(t_0)$]; $\overline{R}_z(t_0)\subset R'_z(t_0)$, $\overline{R}'_z(t_0)\subset G_z^*(t_0)$.

Пусть w_0—произвольная точка $\overline{K}_w$ и

$$z_0=\Phi(w_0, t_0). \tag{32}$$

Очевидно, существует такое $\delta(K_w, K'_w)>0$, что при $|t-t_0|<\delta$ $F(z, t)$ определена и регулярна в точке z_0, и

$$w_1=F(z_0, t) \tag{33}$$

принадлежит K'_w.

Рассмотрим теперь отношение

$$\frac{\Phi(w_0, t)-\Phi(w_0, t_0)}{t-t_0}. \tag{34}$$

Пользуясь вытекающим из (32), (33) равенством

$$\Phi(w_0, t_0)=\Phi(w_1, t), \tag{35}$$

можно представить это отношение в виде

$$\frac{\Phi(w_0, t)-\Phi(w_0, t_0)}{t-t_0} = -\frac{\Phi(w_1, t_0)-\Phi(w_0, t_0)}{w_1-w_0}\,\frac{F(z_0, t)-F(z_0, t_0)}{t-t_0} +$$
$$+\frac{1}{w_1-w_0}\int_{w_0}^{w_1}[\Phi'_w(w, t_0)-\Phi'_w(w, t)]\,dw\cdot\frac{F(z_0, t)-F(z_0, t_0)}{t-t_0}. \tag{36}$$

Так как, по предположению, при $t\to t_0$

$$\frac{F(z_0, t)-F(z_0, t_0)}{t-t_0}$$

равномерно относительно z_0 в $\overline{R}_z(t_0)$ стремится к $\left[\frac{\partial F(z_0, t)}{\partial t}\right]_{t=t_0}$ и, с другой стороны, по теореме Вейерштрасса, $\Phi'_w(w, t)$ [одновременно с $\Phi(w, t)$] равномерно относительно w в K'_w стремится к $\Phi'_w(w, t_0)$, то второе слагаемое в выражении (36) равномерно относительно w_0 в $\overline{K}_w$ стремится к нулю.

Наконец, учитывая еще, что функция $\Phi(w, t)$, по модулю не превышающая R [1], равностепенно непрерывна в w при $w \subset K'_w$ [2] (и достаточно малых $|t-t_0|$, легко показать, что первое слагаемое в (36), следовательно, и отношение (34), при $t \to t_0$ равномерно относительно w_0 в $\overline{K}_w$ стремится к

$$-\left[\frac{\partial\Phi(w, t_0)}{\partial w}\right]_{w=w_0} \cdot \left[\frac{\partial F(z_0, t)}{\partial t}\right]_{t=t_0}.$$

Это и требовалось доказать.

§ 7

Остановимся теперь на случае, когда при $t_1 \subset S_t$, $t_2 \subset S_t$, $t_1 < t_2$,

$$G_z(t_1) \subset G_z(t_2). \tag{37}$$

Предположим еще, что $G_z(b)$ принадлежит кругу $|z| < R$ [3].

Обозначим через

$$w = F(z, t), \quad F(0, t) = 0, \quad F'_z(0, t) > 0, \tag{38}$$

функцию, конформно отображающую $G_z(t)$ на круг

$$Q_w: \quad |w| < 1, \tag{39}$$

и через $z = \Phi(w, t)$ — обратную функцию.

Ясно, что, например, при $t \to t_0 \subset S_t$ $(t_0 \neq b)$ справа последовательность областей $G_z(t)$ сходится как к ядру к некоторой области $G_z(t_0+0) \supset G_z(t_0)$ и, значит, последовательность отображающих функций $w = F(z, t)$ равномерно внутри $G_z(t_0+0)$ сходится к функции $F(z, t_0+0)$, конформно отображающей область $G_z(t_0+0)$ на Q_w.

При отображении

$$w = F(z, t_2) \tag{40}$$

область $G_z(t_1)$, $t_1 < t_2$, переходит в некоторую область Q'_w, принадлежащую Q_w и содержащую точку $w = 0$. Пусть

$$w = \psi(\zeta), \ \psi(0) = 0, \ \psi'(0) > 0, \tag{41}$$

— функция, отображающая на Q'_w круг $|\zeta| < 1$. Очевидно, при $z \subset G_z(t_1)$

$$\zeta = \psi^{-1}(F(z, t_2)) = F(z, t_1). \tag{42}$$

[1] См. предположение 1) теоремы 5.

[2] См. П. Монтель. Нормальные семейства аналитических функций, стр. 29, 1936.

[3] Впрочем, это условие можно заменить более общим условием, что $G_z(b)$ не содержит двух точек $z = \infty$ и $z = c \neq \infty$.

Так как $\psi(\zeta)$ удовлетворяет условиям леммы Шварца, то, по (40), (41), (42), при $z \subset G_z(t_1)$,

$$\left|\frac{F(z,\, t_2)}{z}\right| \leqslant \left|\frac{F(z,\, t_1)}{z}\right|^{1}. \tag{43}$$

Отсюда следует, что функция

$$f(z,\, t) = -\log\frac{F(z,\, t)}{z}, \quad \Im f(0,\, t) = 0 \tag{44}$$

удовлетворяет при $t \subset S_t$, $z \subset G_z(t)$ условиям теорем 3 и 4 [2].

Применяя эти теоремы и теоремы 5, 6, легко приходим к следующим выводам:

Теорема 7. *При указанных выше условиях и обозначениях:*

1) *При всяком $t \subset S_t$, за исключением, самое большее, счетного множества значений t, $F(z,\, t)$ равномерно относительно z внутри $G_z(t)$ непрерывна в t, и*

$$G_z(t+0) \equiv G_z(t-0) \equiv G_z(t).$$

При этих же значениях t $\Phi(w,\, t)$ равномерно относительно w внутри Q_w непрерывна в t.

2) *Если при данном $t \subset S_t$ $F(z,\, t)$ разрывна в t хотя бы при одном значении $z \subset G_z(t-0)$, то она разрывна в t и при всяком $z \subset G_z(t-0)$, $z \neq 0$, причем*

$$|F(z,\, t-0)| > |F(z,\, t+0)|. \tag{45}$$

При этих же значениях t

$$\Phi(w,\, t-0) \neq \Phi(w,\, t+0),$$

при $w \subset Q_w$, $w \neq 0$ [3].

3) *Почти для всех $t \subset S_t$ $\frac{\partial F(z,\, t)}{\partial t}$ существует и регулярна в z при $z \subset G_z(t)$. При этих же значениях t $\frac{\partial \Phi(w,\, t)}{\partial t}$ существует и регулярна в w при $w \subset Q_w$.*

4) *Если при данном $t = t_0 \subset S_t$ $\left[\frac{\partial\left(\frac{F(z,\, t)}{z}\right)}{\partial t}\right]_{t=t_0}$ существует при всяком $z \subset E_z$, где E_z—некоторое полностью внутреннее к $G_z(t)$ и содержащее точку $z = 0$ множество значений z, то $F(z,\, t)$ равномерно относительно z внутри $G_z(t_0)$ дифференцируема по t при $t = t_0$; кроме того, при $z \subset G_z(t_0)$,*

$$\Re\left[\frac{\partial \log\left(\frac{F(z,\, t)}{z}\right)}{\partial t}\right]_{t=t_0} < 0, \tag{46}$$

---

[1] Особенность $\frac{F(z,\, t)}{z}$ при $z = 0$ считаем устраненной.

[2] См. еще примечание 1 на стр. 96.

[3] Последнее вытекает из простых геометрических соображений.

или

$$\frac{\partial F(z, t)}{\partial t} \equiv 0. \tag{47}$$

Аналогично, если $\frac{\Phi(w, t)}{w}$ *дифференцируема по* t *при* $t = t_0$ *на множестве* E_w *значений* w, *полностью внутреннем к* Q_w *и содержащем точку* $w = 0$, *то* $\Phi(w, t)$ *равномерно относительно* w *внутри* Q_w *дифференцируема по* t *при* $t = t_0$ [1].

ГЛАВА II

В первой главе мы рассмотрели некоторые случаи, когда производная $\frac{\partial F(z, t)}{\partial t}$ функции $F(z, t)$, регулярной в z при $t \subset S_t$, $z \subset G_z(t)$, существует при $z \subset G_z^*(t)$ почти для всех $t \subset S_t$.

Естественно поставить теперь следующий вопрос: при каких условиях производная $\frac{\partial F(z, t)}{\partial t}$ существует при *данном* значении $t \subset S_t$ и $z \subset G_z^*(t)$?

В этой главе устанавливаются некоторые теоремы, позволяющие разрешить этот вопрос хотя бы в простейших случаях.

§ 1

Мы полагаем попрежнему, что S_t — сегмент $a \leqslant t \leqslant b$. Однако, почти все рассматриваемые ниже теоремы, при очевидных несущественных изменениях, остаются справедливыми и в более общем случае, когда S_t — произвольное множество сегмента $a \leqslant t \leqslant b$.

Теорема 8. *Пусть семейство областей* $G_z(t)$, $t \subset S_t$, *сходящихся при* $t \to t_0$ *как к ядру к кругу*

$$G_z(t_0): \quad |z| < 1, \tag{48}$$

удовлетворяет следующим условиям:

1) *при* $t \subset S_t$ *граница* $\Gamma_z(t)$ *области* $G_z(t)$ *есть простая замкнутая кривая Жордана:*

$$z = \Omega(\lambda, t), \quad \Omega(0, t) = \Omega(1, t), \tag{49}$$

где

$$\lambda \subset \Sigma_\lambda: \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \tag{50}$$

---

[1] Действительно, пользуясь формулой, аналогичной (36), можно показать, что если $\left[\frac{\partial\left(\frac{\Phi(w_0, t)}{w_0}\right)}{\partial t}\right]_{t=t_0}$ существует при всяком $w_0 \subset E_w$, то $\left[\frac{\partial\left(\frac{F(z_0, t)}{z_0}\right)}{\partial t}\right]_{t=t_0}$ существует при соответствующих значениях $z_0 = \Phi(w_0, t_0)$. Затем остается применить предложение 4) [для $F(z, t)$] теоремы 7 и теорему 6.

2) *при* $t \to t_0$

$$\max_{\lambda \subset \Sigma_\lambda} |\Omega(\lambda, t) - \Omega(\lambda, t_0)| \to 0 \text{ [1]}. \tag{51}$$

Пусть, далее при $\lambda \subset \Sigma_\lambda$, $t \subset S_t$ *задана вещественная функция* $f(\lambda, t)$, *непрерывная в* λ *при* $\lambda \subset \Sigma_\lambda$, $t \subset S_t$ *и равномерно относительно* λ *непрерывная в* t *при* $\lambda \subset \Sigma_\lambda$, $t = t_0$ [2]. *Определим для каждого* $t \subset S_t$ *функцию* $u(z, t)$, *гармоническую от* x, y *в* $G_z(t)$ *и принимающую на* $\Gamma_z(t)$ *при* $z = \Omega(\lambda, t)$ *значения* $f(\lambda, t)$.

Функция $u(z, t)$ *равномерно относительно* z *внутри* $G_z(t_0)$ *непрерывна в* t *при* $t = t_0$ [3].

Доказательство. Так как гармоническая в $G_z(t_0)$ функция $u(z, t_0)$ принимает на $\Gamma_z(t_0)$ непрерывную последовательность значений $f(\lambda, t_0)$, то, по известной теореме[4], для данного $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что при $|z - \Omega(\lambda, t_0)| < \delta$, $z \subset G_z(t_0)$ выполняется неравенство

$$|u(z, t_0) - f(\lambda, t_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{52}$$

Далее, существует такое $\eta(\varepsilon) > 0$, что при $|t - t_0| < \eta$ ($t \subset S_t$) для всех $\lambda \subset \Sigma_\lambda$ имеют место неравенства:

$$|f(\lambda, t) - f(\lambda, t_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{53}$$

$$|\Omega(\lambda, t) - \Omega(\lambda, t_0)| \leqslant \max_{\lambda \subset \Sigma_\lambda} |\Omega(\lambda, t) - \Omega(\lambda, t_0)| < \frac{\delta}{2}. \tag{54}$$

Из (54) следует, что при $|t - t_0| < \eta$ кривая $\Gamma_z(t)$ принадлежит кольцу

$$1 - \frac{\delta}{2} < |z| < 1 + \frac{\delta}{2},$$

и, кроме того (так как $|\Omega(\lambda, t_0)| = 1$),

$$\left| \Omega(\lambda, t) - \left(1 + \frac{\delta}{2}\right) \Omega(\lambda, t_0) \right| < \delta. \tag{55}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$u(z, t_0; \delta) = u\left(\frac{z}{1 + \frac{\delta}{2}},\ t_0\right), \tag{56}$$

---

[1] Между прочим, из условия 2) следует, что функция $z = \Phi(w, t)$, $\Phi(0, t) = 0$, $\Phi'_w(0, t) > 0$, конформно отображающая круг $|w| < 1$ на область $G_z(t)$, равномерно относительно w в замкнутом круге $|w| \leqslant 1$ непрерывна в t при $t = t_0$ [теорема Rado, см. например, Маркушевич, Матем. сб., **1 (43) : 6** (1936), 875].

[2] Очевидно, непрерывность в λ функции $f(\lambda, t)$ при $t = t_0$ можно и не предполагать, но выводить как следствие остальных предположений.

[3] Пользуясь теоремой Rado, можно обобщить теорему 8 на случай, когда $G_z(t_0)$ есть произвольная область Жордана.

[4] См. И. Привалов, Интеграл Коши, стр. 8, 1919.

гармоническую в круге $|z| < 1 + \frac{\delta}{2}$ и принимающую при $z = \left(1 + \frac{\delta}{2}\right) \times \Omega(\lambda, t_0)$ значения $f(\lambda, t_0)$.

Из (52) вытекает, что при

$$\left|z - \left(1 + \frac{\delta}{2}\right) \Omega(\lambda, t_0)\right| < \delta, \quad |z| < 1 + \frac{\delta}{2},$$

выполняется неравенство

$$|u(z, t_0; \delta) - f(\lambda, t_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

В частности, в силу (55), при $|t - t_0| < \eta$

$$|u(\Omega(\lambda, t), t_0; \delta) - f(\lambda, t_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{57}$$

и, следовательно [см. (53)],

$$|u(\Omega(\lambda, t), t_0; \delta) - u(\Omega(\lambda, t), t)| = |u(\Omega(\lambda, t), t_0; \delta) - f(\lambda, t)| < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Таким образом, при $|t - t_0| < \eta$ функция $u(z, t_0; \delta) - u(z, t)$ принимает на $\Gamma_z(t)$, а вместе с тем (по принципу максимума) и всюду в $G_z(t)$ значения, по модулю не превышающие $\frac{2\varepsilon}{3}$:

$$|u(z, t_0; \delta) - u(z, t)| < \frac{2\varepsilon}{3} \text{ при } z \subset \overline{G}_z(t). \tag{58}$$

Аналогично, полагая в (57) $t = t_0$, заключаем, что

$$|u(z, t_0; \delta) - u(z, t_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{при } z \subset \overline{G}_z(t_0). \tag{59}$$

Рассмотрим теперь произвольную замкнутую область $\overline{K}_z$, внутреннюю для $G_z(t_0)$. Так как при $t \to t_0$ семейство областей $G_z(t)$ сходится к $G_z(t_0)$ как к ядру, то существует такое $\eta'(\overline{K}_z)$, что при $|t - t_0| < \eta'$ все области $G_z(t)$ содержат $\overline{K}_z$. При $|t - t_0| < \min(\eta, \eta')$ неравенства (58) и (59) будут одновременно выполняться в $\overline{K}_z$. Поэтому для всех $z \subset \overline{K}_z$ будет также выполняться неравенство

$$|u(z, t) - u(z, t_0)| < \varepsilon, \tag{60}$$

что и требовалось установить.

§ 2

В предыдущей теореме предполагалось, что функция $f(\lambda, t)$ равномерно относительно λ непрерывна в t при $t = t_0$. При некоторых дополнительных предположениях можно показать, что результат теоремы 8 остается справедливым и в случае, когда $f(\lambda, t)$ не будет равномерно относительно λ непрерывной в t при $t = t_0$. Именно, докажем следующую теорему.

Теорема 9. *Пусть семейство областей $G_z(t)$, $t \subset S_t$, удовлетворяет условиям теоремы 8 и, кроме того, условиям:*

A) *каково бы ни было ε, можно указать такие числа $\delta(\varepsilon) > 0$ и $\eta(\varepsilon) > 0$, что при $|t-t_0| < \delta$ всякому множеству значений $\lambda \subset \Sigma_\lambda$, мера которого не больше η, на кривой $\Gamma_z(t)$ соответствует множество точек $z = \Omega(\lambda, t)$, гармоническая мера*[1] *которого в точке $z=0$ относительно области $G_z(t)$ не превышает ε,*

B) *всякому множеству точек $z = \Omega(\lambda, t_0)$, для которого гармоническая мера в точке $z=0$ относительно области $G_z(t_0)$ равна нулю, соответствует множество значений λ меры нуль*[2].

Пусть, далее, функция $f(\lambda, t)$, определенная при $\lambda \subset \Sigma_\lambda$, $t \subset S_t$, ограничена,

$$|f(\lambda, t)| < M < \infty, \tag{61}$$

непрерывна в λ при $\lambda \subset \Sigma_\lambda$, $t \subset S_t$, $t \neq t_0$, и почти для всех $\lambda \subset \Sigma'_\lambda$ непрерывна в t при $t = t_0$.

Обозначим при $t \subset S_t$, $t \neq t_0$ через $u(z, t)$ гармоническую в $G_z(t)$ функцию, принимающую на $\Gamma_z(t)$ при $z = \Omega(\lambda, t)$ значения $f(\lambda, t)$. Определим также при $t = t_0$, $z \subset G_z(t_0)$ функцию $u(z, t_0)$ интегралом Пуассона

$$u(re^{i\varphi}, t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\lambda(\vartheta), t_0)\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\vartheta-\varphi)}\,d\vartheta\ ^{3}, \tag{62}$$

где

$$\vartheta = \arg \Omega(\lambda, t_0).$$

Мы утверждаем, что функция $u(z, t)$ равномерно относительно z внутри $G_z(t_0)$ непрерывна в t при $t = t_0$.

Доказательство. Сначала докажем теорему при следующих дополнительных предположениях:

α) *при $t \subset S_t$ $G_z(t) \subset G_z(t_0)$,*

β) *для всякого $\lambda \subset \Sigma_\lambda$ точка $z = \Omega(\lambda, t)$ при $t \to t_0$ стремится к $z_0 = \Omega(\lambda, t_0)$, оставаясь (при достаточно малых $|t-t_0|$) внутри угла*

$$-\frac{\pi}{2} + \alpha \leqslant \arg\frac{z_0 - z}{z_0} \leqslant \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad \alpha > 0. \tag{63}$$

Пусть K_z—произвольная замкнутая область, внутренняя к $G_z(t_0)$. При $t \to t_0$ семейство областей $G_z(t)$ сходится как к ядру к $G_z(t_0)$. Поэтому и по условию A) для данного ε можно указать такие числа

[1] См. R. Nevanlinna, Eindeutige analytische Funktionen, S. 26, 1936.

[2] Напомним, что гармоническая мера в точке $z=0$ дуги $\widehat{\vartheta_1\vartheta_2}$ окружности $z = e^{\vartheta i}$ относительно круга $G_z(t_0)$ равна $\frac{1}{2\pi}|\vartheta_2 - \vartheta_1|$.

[3] Из предположения B) и свойств функции $f(\lambda, t)$ следует, что $f(\lambda, t_0)$ как функция от ϑ суммируема по ϑ.

$\delta_1(\varepsilon, \overline{K}_z)$ и $\eta_1(\varepsilon, \overline{K}_z)$, что при $|t-t_0|<\delta_1$ всякому множеству значений $\lambda \subset \Sigma_\lambda$, мера которого не превышает η_1, будет соответствовать на $\Gamma_z(t)$ множество точек $z=\Omega(\lambda, t)$, для которого гармоническая мера относительно области $G_z(t)$ во всякой точке $z \subset \overline{K}_z$ не превышает $\frac{\varepsilon}{4M}$ [1].

Далее, пусть $t_1, t_2, t_3, \ldots$ — произвольная последовательность значений $t \subset S_t$, сходящаяся к t_0. Рассмотрим функцию $u(z, t_0)$. В силу известного свойства интеграла Пуассона, при стремлении z изнутри $G_z(t_0)$ к точке $z_0=\Omega(\lambda, t_0)=e^{i\vartheta}$ по любому не касательному к $\Gamma_z(t_0)$ пути, $u(z, t_0)$ почти всюду на $\Gamma_z(t_0)$ (т. е. почти для всех ϑ на сегменте $0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi$) стремится к $f(\lambda(\vartheta), t_0)$ [2]. Отсюда и из условий В), α), β) вытекает, что последовательность определенных на Σ_λ функций

$$\varphi_n(\lambda)=u(\Omega(\lambda, t_n), t_0) \quad (n=1, 2, 3, \ldots) \tag{64}$$

почти всюду на сегменте Σ_λ сходится к $f(\lambda, t_0)$. Но в таком случае, по теореме Егорова, существует множество $E'_\lambda \subset \Sigma_\lambda$ меры больше $1-\frac{\eta}{2}$, на котором последовательность функций $\varphi_n(\lambda)$ сходится к $f(\lambda, t_0)$ равномерно.

Аналогично, так как последовательность функций $f(\lambda, t_n)$ почти всюду на Σ_λ сходится к $f(\lambda, t_0)$ [3], можно указать множество $E_\lambda \subset E'_\lambda$ меры больше $1-\eta_1$, на котором $f(\lambda, t_n)$ сходится к $f(\lambda, t_0)$ равномерно. Поэтому существует такое $\delta_2<\delta_1$, что при $|t_n-t_0|<\delta_2$ для всех $\lambda \subset E_\lambda$ одновременно выполняются неравенства:

$$|\varphi_n(\lambda)-f(\lambda, t_0)|<\frac{\varepsilon}{4}, \tag{65}$$

$$|f(\lambda, t_n)-f(\lambda, t_0)|<\frac{\varepsilon}{4}, \tag{66}$$

следовательно, и неравенство

$$|u(\Omega(\lambda, t_n), t_0)-u(\Omega(\lambda, t_n), t_n)|=|\varphi_n(\lambda)-f(\lambda, t_n)|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{67}$$

С другой стороны, из принципа максимума следует, что при $\lambda \subset \Sigma_\lambda - E_\lambda$

$$|u(\Omega(\lambda, t_n), t_0)-u(\Omega(\lambda, t_n), t_n)|<2M. \tag{68}$$

При этом, по определению чисел η_1 и $\delta_2<\delta_1$, при $|t_n-t_0|<\delta_2$ в любой точке $z \subset \overline{K}_z$ гармоническая мера $\omega(z, \alpha(t_n), G_z(t_n))$ [относительно

---

[1] См. R. Nevanlinna, Eindeutige analytische Funktionen, S. 108, Lemme. Из доказательства указанной леммы легко видеть, что в нашем случае, при достаточно малых $|t-t_0|$, в неравенстве, устанавливаемом леммой, постоянную k можно считать не зависящей от t.

[2] См. И. Привалов, Интеграл Коши, стр. 12.

[3] См. предположения теоремы.

$G_z(t_n)$] множества $\alpha(t_n)$ точек границы $\Gamma_z(t_n)$ области $G_z(t_n)$, соответствующего множеству $\Sigma_\lambda - E_\lambda$ значений λ, не превышает $\frac{\varepsilon}{4M}$.

Неравенства (67) и (68) показывают, что при $|t_n - t_0| < \delta_2$ функция

$$U(z, t_n) = u(z, t_0) - u(z, t_n), \tag{69}$$

гармоническая в $G_z(t_n)$, принимает на части $\alpha(t_n)$ границы области $G_z(t_n)$ значения, по модулю не превышающие $2M$, а на остальной части границы $\Gamma_z(t_n)$—значения, по модулю не бо́льшие $\frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда и из представления гармонической функции через ее граничные значения посредством гармонической меры

$$U(z, t_n) = \int U(\zeta, t_n)\, d\omega(\zeta, z; t_n)\ ^1 \tag{70}$$

следует, что при $|t_n - t_0| < \delta_2$ во всякой точке $z \subset G_z(t_n)$ выполняется неравенство

$$|u(z, t_0) - u(z, t_n)| < \frac{\varepsilon}{2} + 2M\omega(z, \alpha(t_n), G_z(t_n)).$$

В частности, для всякого $z \subset K_z$

$$\omega(z, \alpha(t_n), G_z(t_n)) < \frac{\varepsilon}{4M},$$

и поэтому

$$|u(z, t_0) - u(z, t_n)| < \varepsilon. \tag{71}$$

Итак, доказано, что, какова бы ни была последовательность t_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, сходящаяся к t_0, последовательность функций $u(z, t_n)$ равномерно в $\bar{K}_z$ сходится к $u(z, t_0)$. Опираясь на этот результат, нетрудно убедиться в справедливости утверждения теоремы (хотя бы доказательством от противного).

Переходим к доказательству теоремы в общем случае, т. е. без дополнительных условий α), β). Введем в рассмотрение функцию

$$\chi(t) = \frac{1}{\max\limits_{\lambda \subset \Sigma_\lambda} |\Omega(\lambda, t)|} \left\{1 - \frac{\sin\alpha}{q - \sin\alpha} \max_{\lambda \subset \Sigma_\lambda} \left|\arg\frac{\Omega(\lambda, t)}{\Omega(\lambda, t_0)}\right|\right\}, \tag{72}$$

где α и q—числа, удовлетворяющие неравенствам:

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \tag{73}$$

$$\sin\alpha < q < 1. \tag{74}$$

Так как [см. (51)]

$$\lim_{t \to t_0} \max_{\lambda \subset \Sigma_\lambda} \left|\arg\frac{\Omega(\lambda, t)}{\Omega(\lambda, t_0)}\right| = 0 \tag{75}$$

[1] См. R. Nevanlinna, Eindeutige analytische Funktionen, S. 27.

и

$$\lim_{t\to t_0}\max_{\lambda\subset\Sigma_\lambda}|\Omega(\lambda, t)|=1,$$

то при малых $|t-t_0|$, скажем, при $|t-t_0|<\delta$, $\delta>0$, $\chi(t)$ положительна и

$$\chi(t_0)=\lim_{t\to t_0}\chi(t)=1. \tag{76}$$

Построим, далее, семейство областей $\tilde{G}_z(t)$, $t\subset S_t$, $|t-t_0|<\delta$, ограниченных кривыми

$$\tilde{\Gamma}_z(t):\qquad z=\tilde{\Omega}(\lambda, t)=\chi(t)\,\Omega(\lambda, t). \tag{77}$$

Легко проверить, что это семейство областей удовлетворяет не только условиям теоремы, но и дополнительным условиям α), β) [1].

Обозначим, при $t\subset S_t$, $t\neq t_0$, через $\tilde{u}(z, t)$ функцию, гармоническую в $\tilde{G}_z(t)$ и принимающую на $\tilde{\Gamma}_z(t)$ при $z=\tilde{\Omega}(\lambda, t)$ значения $f(\lambda, t)$, и положим еще

$$\tilde{u}(z, t_0)=u(z, t_0). \tag{78}$$

Очевидно, при $z\subset G_z(t)$,

$$u(z, t)=\tilde{u}(z\chi(t), t). \tag{79}$$

Пусть теперь $\bar{K}_z$—произвольная замкнутая область, внутренняя для $G_z(t_0)$, и $\bar{Q}_z$—наименьший круг $|z|\leqslant r$, $r<1$, содержащий $\bar{K}_z$. По доказанному выше при $z\subset\bar{Q}_z$ функция $\tilde{u}(z, t)$ равномерно относительно

---

[1] Остановимся только на проверке условия β). Обозначая кратко

$$\Omega(\lambda, t)=\tilde{\Omega},\quad \Omega(\lambda, t_0)=\tilde{\Omega}_0,\quad \left|\arg\frac{\Omega(\lambda, t_0)-\Omega(\lambda, t)}{\Omega(\lambda, t_0)}\right|=\left|\arg\frac{\tilde{\Omega}_0-\tilde{\Omega}}{\tilde{\Omega}_0}\right|=\varphi,$$

имеем, при достаточно малых $|t-t_0|$,

$$\cos\varphi=\frac{1+|\tilde{\Omega}-\tilde{\Omega}_0|^2-|\tilde{\Omega}|^2}{2|\tilde{\Omega}-\tilde{\Omega}_0|}\geqslant\frac{1+\tilde{\Omega}}{2}\,\frac{1-|\tilde{\Omega}|}{|\tilde{\Omega}-\tilde{\Omega}_0|}>q\,\frac{1-|\tilde{\Omega}|}{|\tilde{\Omega}-\tilde{\Omega}_0|}.$$

Замечая, что

$$|\tilde{\Omega}-\tilde{\Omega}_0|\leqslant 1-|\tilde{\Omega}|+\left|\arg\frac{\tilde{\Omega}}{\tilde{\Omega}_0}\right|=1-\chi(t)|\Omega|+\left|\arg\frac{\Omega}{\Omega_0}\right|,$$

получаем, далее,

$$\cos\varphi>\frac{q}{1+\dfrac{\left|\arg\dfrac{\Omega}{\Omega_0}\right|}{1-|\tilde{\Omega}|}}\geqslant\frac{q}{1+\dfrac{\max\limits_{\lambda\subset\Sigma_\lambda}\left|\arg\dfrac{\Omega}{\Omega_0}\right|}{1-\chi(t)\max\limits_{\lambda\subset\Sigma_\lambda}|\Omega|}}=\sin\alpha,$$

откуда следует, что

$$\varphi<\frac{\pi}{2}-\alpha.$$

z непрерывна в t при $t=t_0$; следовательно, при достаточно малых $|t-t_0|$ для всех $z \subset \overline{Q}_z$ будет выполняться неравенство

$$|\tilde{u}(z, t)-u(z, t_0)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{80}$$

С другой стороны, так как семейство областей $\tilde{G}_z(t)$ при $t \to t_0$ сходится к $G_z(t_0)$ как к ядру и так как функция $\tilde{u}(z, t)$ ограничена,

$$|\tilde{u}(z, t)| < M \text{ при } z \subset \tilde{G}_z(t),\ t \subset S_t,\ |t-t_0| < \delta, \tag{81}$$

то, по известной теореме[1], существует такое не зависящее от t число k, что при любых $t \subset S_t$, достаточно близких к t_0, и для любых двух точек z, z' круга $\overline{Q}_z$ выполняется неравенство

$$|\tilde{u}(z, t)-\tilde{u}(z', t)| < \bar{k}\,|z'-z|. \tag{82}$$

Полагая в этом неравенстве $z'=z\chi(t)$, имеем [см. (79)]

$$|\tilde{u}(z, t)-u(z, t)| < k(1-\chi(t)), \tag{83}$$

откуда следует, что, при достаточно малых $|t-t_0|$,

$$|\tilde{u}(z, t)-u(z, t)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ при } z \subset \overline{Q}_z. \tag{84}$$

Неравенства (80) и (84) доказывают теорему.

§ 3

При формулировке теоремы 9 мы ввели два условия A), B). Следует отметить, что эти условия, отдельно взятые, собственно, не являются ограничениями, накладываемыми на семейство областей Жордана, а характеризуют свойства параметрического представления границ этих областей. Каково бы ни было семейство содержащих $z=0$ областей Жордана $G_z(t)$, можно указать такие параметрические представления границ $\Gamma_z(t)$, для которых условия A), B) будут выполняться. Так, например, если принять за параметр λ гармоническую меру в точке $z=0$, относительно $G_z(t)$, дуги $\alpha(t)$ границы $\Gamma_z(t)$, концами которой являются некоторая фиксированная на $\Gamma_z(t)$ точка ζ_0 и переменная точка $\zeta \subset \Gamma_z(t)$, пробегающая $\Gamma_z(t)$ в определенном направлении,—то, очевидно, условия A), B) будут выполняться. С другой стороны, существуют такие параметрические представления границ $\Gamma_z(t)$, для которых условия A), B) не выполняются. Пусть, например, при $t \subset S_t$ все области $G_z(t)$ совпадают с кругом $G_z(t_0)$, и, следовательно, гармоническая мера в точке $z=0$ всякого множества точек $z=e^{i\vartheta}$ границы $\Gamma_z(t) \equiv \Gamma_z(t_0)$ совпадает с деленной на 2π линейной мерой этого множества. Рассмо-

[1] См. П. Монтель, Нормальные семейства аналитических функций, стр. 12, теорема о равностепенной непрерывности.

трим произвольную вещественную функцию $\lambda = \varphi(\vartheta, t)$, обладающую следующими свойствами:

1) при $t \subset S_t$ $\varphi(0, t) = 0$, $\varphi(2\pi, t) = 1$,

2) при любом $t \subset S_t$ $\varphi(\vartheta, t)$ является непрерывной монотонно возрастающей на сегменте $0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi$ функцией от ϑ,

3) обратная (относительно ϑ) функция $\vartheta(\lambda, t)$ не является абсолютно непрерывной от λ на сегменте $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$,

4) $\varphi(\vartheta, t_0)$ также не является абсолютно непрерывной от ϑ при $0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi$.

При этих условиях параметрическое представление границ

$$z = \Omega(\lambda, t) = e^{i\vartheta(\lambda, t)}, \tag{85}$$

очевидно, не удовлетворяет условиям A), B). Условие 2) (см. теорему 8) также, вообще говоря, не выполняется, но будет выполняться, если $\vartheta(\lambda, t)$ равномерно относительно λ непрерывна в t при $t = t_0$, $\lambda \subset \Sigma_\lambda$.

Если границы $\Gamma_z(t)$ спрямляемы, то можно в ряде случаев выяснить, что данное параметрическое представление удовлетворяет условию A), пользуясь следующим предложением:

Теорема 10. *Пусть граничные кривые $\Gamma_z(t)$ семейства областей $G_z(t)$ спрямляемы, длины $L(t)$ кривых $\Gamma_z(t)$ равномерно ограничены,*

$$L(t) < M < \infty,$$

и каждая область $G_z(t)$ содержит круг $|z| < \rho_0$. Пусть, далее, заданное параметрическое представление

$$z = \Omega(\lambda, t), \quad \lambda \subset \Sigma_\lambda. \tag{86}$$

кривых $\Gamma_z(t)$ удовлетворяет условию:

C) *Каково бы ни было $\alpha > 0$, существуют такие числа $\eta(\alpha) > 0$, $\delta(\alpha) > 0$, что при $|t - t_0| < \delta$ всякому множеству σ_λ значений $\lambda \subset \Sigma_\lambda$, мера которого не больше η, соответствует на $\Gamma_z(t)$ множество точек $z = \Omega(\lambda, t)$, линейная мера которого не превышает α.*

Тогда параметрическое представление границ (86) *удовлетворяет условию* A).

Доказательство. По теореме Лаврентьева[1] при конформном отображении $w = F(z, t)$, $F(0, t) = 0$ области $G_z(t)$ на круг $|w| < 1$ всякому множеству E_z точек $z = \Omega(\lambda, t)$ границы $\Gamma_z(t)$, мера которого не больше α, соответствует на окружности $|w| = 1$ множество E_w,

$$\operatorname{mes} E_w < \frac{KM}{1 + |\log \alpha|}, \tag{87}$$

[1] См. М. А. Лаврентьев, Матем. сб., 1 (43) : 6 (1936), 838, теорема 6.

где K — постоянная, зависящая лишь от ρ_0. В частности, при

$$\alpha < e^{1-\frac{KM}{2\pi\varepsilon}} < 1 \tag{88}$$

$\operatorname{mes} E_w < 2\pi\varepsilon$, и, следовательно, гармоническая мера в точке $z=0$ относительно $G_z(t)$ множества E_z, по свойству инвариантности гармонической меры при однолистных отображениях равная $\frac{1}{2\pi}\operatorname{mes} E_w$, не превышает ε. Отсюда и из условия C) очевидным образом следует выполняемость условия A).

§ 4

Пользуясь, соответственно, теоремами 8, 9, можно доказать следующие две теоремы:

Теорема 11. *Пусть семейство областей $G_z(t)$, $t \subset S_t$, удовлетворяет следующим условиям:*

1) *точка $z=0$ принадлежит каждой области $G_z(t)$,*

2) *граница $\Gamma_z(t)$ области $G_z(t)$ есть простая замкнутая кривая Жордана:*

$$z = \Omega(\lambda, t), \quad \lambda \subset \Sigma_\lambda, \tag{89}$$

3) *функция $\Omega(\lambda, t)$ равномерно относительно λ на Σ_λ дифференцируема по t при $t=t_0$,*

4) *$\Gamma_z(t_0)$ — аналитическая кривая.*

Тогда функция

$$w = F(z, t),\ F(0, t) = 0,\ F'_z(0, t) > 0, \tag{90}$$

конформно отображающая $G_z(t)$ на круг Q_w [см. (39)], *равномерно относительно z внутри $G_z(t_0)$ дифференцируема по t при $t=t_0$.*

Теорема 12. *Пусть семейство областей $G_z(t)$ удовлетворяет условиям* 1), 2), 4) *теоремы* 11, *условиям* A), B) *и условиям:*

5) *при $\lambda \subset \Sigma_\lambda$, $t \subset S_t$, $t \neq t_0$,*

$$\left| \frac{\Omega(\lambda, t) - \Omega(\lambda, t_0)}{t - t_0} \right| < M < \infty, \tag{91}$$

6) *производная $\left[\frac{\partial \Omega(\lambda, t)}{\partial t}\right]_{t=t_0}$ существует почти для всех $\lambda \subset \Sigma_\lambda$.*

Тогда $F(z, t)$ [см. (90)] *равномерно относительно z внутри $G_z(t_0)$ дифференцируема по t при $t=t_0$.*

Кроме того, в условиях теорем 11 или 12, при $z \subset G_z(t_0)$, имеет место формула

$$\left[\frac{\partial F(z, t)}{\partial t}\right]_{t=t_0} =$$

$$= \frac{F(z, t_0)}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial \log |F(\Omega(\lambda, t), t_0)|}{\partial t} \right]_{t=t_0} \frac{e^{i\vartheta} + F(z, t_0)}{e^{i\vartheta} - F(z, t_0)}\, d\vartheta. \tag{92}$$

Так как доказательства этих теорем аналогичны, приведем только доказательство теоремы 12.

Достаточно доказать теорему для случая, когда $G_z(t_0)$ есть круг $|z| < 1$, так как общий случай, в силу условия 4), сводится к этому случаю после отображения $\zeta = F(z, t_0)$ области $G_z(t_0)$ на круг $|\zeta| < 1$ [1].

Обозначим через $P(z, t)$ и $Q(z, t)$, соответственно, вещественную и мнимую часть аналитической в $G_z(t)$ функции

$$\varphi(z, t) = \log \frac{F(z, t)}{z}, \quad \Im \varphi(0, t) = 0. \tag{93}$$

Заметим, что

$$P(z, t_0) \equiv 0, \quad Q(0, t) \equiv 0. \tag{94}$$

В силу условий доказываемой теоремы семейство областей $G_z(t)$ и функция

$$f(\lambda, t) = -\frac{\log|\Omega(\lambda, t)|}{t - t_0} = -\frac{\log|\Omega(\lambda, t)| - \log|\Omega(\lambda, t_0)|}{t - t_0} \text{ при } t \neq t_0,$$

$$f(\lambda, t_0) = -\left[\frac{\partial \log|\Omega(\lambda, t)|}{\partial t}\right]_{t=t_0}{}^{2}, \tag{95}$$

удовлетворяют условиям теоремы 9. По этой теореме гармоническая в $G_z(t)$ и принимающая на границе $z = \Omega(\lambda, t)$ области $G_z(t)$ значения $f(\lambda, t)$ функция

$$u(z, t) = \frac{P(z, t)}{t - t_0} \quad (t \neq t_0) \tag{96}$$

при $t \to t_0$ равномерно относительно z внутри $G_z(t_0)$ стремится к функции

$$u(re^{i\psi}, t_0) = \left[\frac{\partial P(z, t)}{\partial t}\right]_{t=t_0} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial \log|\Omega(\lambda(\vartheta), t)|}{\partial t}\right]_{t=t_0} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\vartheta - \psi)}\, d\vartheta. \tag{97}$$

Далее, во всяком круге $|z| < \rho$, $\rho < 1$, функция $\varphi(z, t)$ представима через значения, принимаемые ее вещественной частью $P(z, t)$ на границе γ_ρ этого круга, интегралом Шварца

$$\varphi(z, t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho} P(\zeta, t)\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\frac{d\zeta}{\zeta} = P(z, t) + iQ(z, t). \tag{98}$$

В силу только что установленной равномерной (относительно ζ) дифференцируемости по t функции $P(\zeta, t)$ при $\zeta \subset \gamma_\rho$, $t = t_0$, к интег-

[1] Легко видеть, что при этом отображении семейство областей $G_z(t)$, $t \subset S_t$, $|t - t_0| < \delta$ (где $\delta > 0$ — достаточно малое число), переходит в семейство близких к кругу областей, удовлетворяющее условиям теоремы 12.

[2] На множестве меры нуль значений λ, где $f(\lambda, t_0)$ не определена, доопределяем ее произвольно, полагая, например, $f(\lambda, t_0) = 0$.

ралу (98) можно применить обычное правило дифференцирования по параметру. Учитывая еще произвольность выбора $\rho < 1$, заключаем отсюда, что $\left[\frac{\partial\varphi(z, t)}{\partial t}\right]_{t=t_0}$ существует и голоморфна в круге $G_z(t_0)$ и, следовательно [см. (97)], также может быть представлена в $G_z(t_0)$ через суммируемые по ϑ граничные значения $\left[\frac{\partial|\Omega(\lambda, t)|}{\partial t}\right]_{t=t_0}$ ее вещественной части $\left[\frac{\partial P(z, t)}{\partial t}\right]_{t=t_0}$ интегралом Шварца

$$\left[\frac{\partial\varphi(z, t)}{\partial t}\right]_{t=t_0} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial|\Omega(\lambda, t)|}{\partial t}\right]_{t=t_0}\frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}\,d\vartheta. \tag{99}$$

Затем, пользуясь также формулой (98), легко показать, что $\varphi(z, t)$ равномерно относительно z внутри $G_z(t)$ дифференцируема по t при $t=t_0$.

Наконец, так как

$$F(z, t) = ze^{\varphi(z, t)}, \tag{100}$$

то из предыдущего следует, что $F(z, t)$ также равномерно относительно z внутри $G_z(t_0)$ дифференцируема по t при $t=t_0$ и при $z \subset G_z(t_0)$ имеет место формула

$$\left[\frac{\partial F(z, t)}{\partial t}\right]_{t=t_0} = z\left[\frac{\partial\varphi(z, t)}{\partial t}\right]_{t=t_0} = -\frac{z}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial|\Omega(\lambda, t)|}{\partial t}\right]_{t=t_0}\frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}\,d\vartheta. \tag{101}$$

Это и требовалось доказать.

Следствие 1. По теореме 6, в условиях теоремы 12 (или 11), функция $z=\Phi(w, t)$, обратная $w=F(z, t)$, равномерно относительно w внутри Q_w дифференцируема по t при $t=t_0$ и удовлетворяет соотношению [см. (92)]

$$\left[\frac{\partial\Phi(w, t)}{\partial t}\right]_{t=t_0} = \frac{w}{2\pi}\,\frac{\partial\Phi(w, t_0)}{\partial w}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial\log|F(\Omega(\lambda, t), t_0)|}{\partial t}\right]_{t=t_0}\frac{e^{i\vartheta}+w}{e^{i\vartheta}-w}\,d\vartheta. \tag{102}$$

Следствие 2. Рассмотрим случай, когда семейство областей $G_z(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 12 (или 11), $G_z(t_0)$ есть круг $|z|<1$ и, кроме того, α) $\Gamma_z(t)$ пересекается со всяким лучом $\arg z=\vartheta$ только в одной точке, β) $\lambda=\vartheta$ и

$$\Omega(\lambda, t) = r(\vartheta, t)\,e^{i\vartheta}, \quad r(\vartheta, t) > 0.$$

Тогда (101) можно записать в виде

$$\left[\frac{\partial F(z, t)}{\partial t}\right]_{t=t_0} = \frac{z}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}\,d\left[\frac{\partial S(\vartheta, t)}{\partial t}\right]_{t=t_0}, \tag{103}$$

где $S(\vartheta_0, t)$ — площадь, ограниченная лучами $\vartheta=0$, $\vartheta=\vartheta_0$ и кривыми $\Gamma_z(t_0)$, $\Gamma_z(t)$, причем та часть этой площади, которая не принадлежит кругу $|z|<1$, считается отрицательной.

Отсюда, в частности, при $z=0$ получаем

$$\left[\frac{dF'_z(0, t)}{dt}\right]_{t=t_0} = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{dS(2\pi, t)}{dt}\right]_{t=t_0}{}^{1}. \tag{104}$$

Следствие 3. Отметим еще следующий частный случай теорем 11, 12:

Теорема 13. *Пусть для семейства областей $G_z(t)$ выполняются все условия теоремы 11 (или 12), за исключением условия 4), и пусть кроме того, α) при $t_1 < t_2$ $G_z(t_1) \subset G_z(t_2)$, β) при стремлении z изнутри $G_z(t_0)$ к любой точке границы $\Gamma_z(t_0)$ $F'_z(z, t_0)$ стремится к определенным предельным значениям, равномерно ограниченным на $\Gamma_z(t_0)$.*

Тогда функция $F(z, t)$ [см. (90)] равномерно относительно z внутри $G_z(t_0)$ дифференцируема по t слева при $t=t_0$, и левая производная

$$D_t^- F(z, t_0) = \lim_{h\to 0, h<0} \frac{F(z, t_0+h) - F(z, t_0)}{h} \tag{105}$$

при $z \subset G_z(t_0)$ может быть представлена формулой

$$D_t^- F(z, t_0) = -\frac{F(z, t_0)}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_t^- \log|F(\Omega(\lambda, t), t_0)|]_{t=t_0}\cdot\frac{e^{i\vartheta}+F(z, t_0)}{e^{i\vartheta}-F(z, t_0)}\,d\vartheta. \tag{106}$$

Действительно, так как при отображении $\zeta = F(z, t_0)$ области $G_z(t_0)$ на круг $|\zeta|<1$ семейство областей $G_z(t)$, $t \subset S_t$, $t<t_0$, переходит в семейство областей, принадлежащих кругу $|\zeta|<1$ и удовлетворяющих условиям теоремы (11) или (12), то для левой производной $D_t^- F(z, t_0)$ остаются справедливыми рассуждения этих теорем.

Таким образом, в этом случае теоремы 11, 12 имеют место для левой производной по t, если и не предполагать, что кривая Жордана $\Gamma_z(t_0)$ есть аналитическая кривая.

§ 5

Условия 3) теоремы 11 или 6) теоремы 12 могут быть формулированы иначе, если ввести одно новое понятие.

Пусть $G_z(t)$, $t \subset S_t$, — произвольное однопараметрическое семейство односвязных областей, не содержащих точек $z=\infty$ и $z=c\neq\infty$. Построим некоторое множество L_z, имеющее с границей $\Gamma_z(t)$ каждой области $G_z(t)$ одну и только одну общую точку $\zeta(t)$.

Если разность $\zeta(t)-\zeta(t_0)$ при $t\to t_0 \subset S_t$ стремится к нулю, то

---

[1] См. М. А. Лаврентьев, Труды Физ.-матем. института им. В. А. Стеклова, V (1934), 162.

будем говорить, что при $t \to t_0$ семейство областей $G_z(t)$ сходится по множеству L_z. Далее, если при $t \to t_0$ отношение

$$\frac{\zeta(t)-\zeta(t_0)}{t-t_0}$$

стремится к определенному пределу, то этот предел

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\zeta(t)-\zeta(t_0)}{t-t_0}=V(L_z, t_0) \tag{107}$$

назовем z-быстротой сходимости семейства областей $G_z(t)$ по множеству L_z при $t \to t_0$.

При помощи этого понятия условие 6) теоремы 12 может быть высказано так:

Пусть $L_z(\lambda_0)$ — множество точек

$$\zeta = \Omega(\lambda_0, t), \quad t \subset S_t. \tag{108}$$

Почти для всех $\lambda \subset \Sigma_\lambda$ при $t \to t_0$ существует определенная z-быстрота сходимости семейства областей $G_z(t)$ по множеству $L_z(\lambda)$.

Аналогично может быть высказано и условие 3) теоремы 11.

Пусть, в частности, множество L_z есть простая спрямляемая дуга Жордана. Обозначим через $s(t)$ длину дуги кривой L_z от некоторой фиксированной на L_z точки ζ_1 до точки $\zeta(t)$ пересечения L_z с $\Gamma_z(t)$. Если

$$\lim_{t\to t_0}\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}=v(L_z, t_0) \tag{109}$$

существует, то этот предел назовем s-быстротой сходимости семейства областей $G_z(t)$ по кривой L_z при $t \to t_0$.

Пользуясь этим понятием, отметим следующий частный случай теоремы 12:

Теорема 14. *Пусть семейство областей $G_z(t)$, $t \subset S_t$, сходящихся при $t \to t_0$ как к ядру к $G_z(t_0)$, удовлетворяет условиям* 1), 2), 4) *теоремы* 11. *Обозначим через μ отношение длины дуги кривой $\Gamma_z(t_0)$, отсчитываемой от некоторой фиксированной на $\Gamma_z(t_0)$ точки, к длине всей кривой $\Gamma_z(t_0)$. Предположим, что существует семейство начинающихся в точке $z=0$ простых спрямляемых дуг Жордана $L_z(\mu)$, обладающее следующими свойствами:*

1) *через каждую точку кривой $\Gamma_z(t_0)$ проходит одна и только одна кривая*

$$L_z(\mu): \quad \zeta = \chi(s, \mu) \tag{110}$$

[*где s — длина дуги кривой $L_z(\mu)$, отсчитываемая от точки $\zeta=0$*],

2) *при $|t-t_0|<\delta$, $\delta>0$, каждая кривая $L_z(\mu)$ имеет с $\Gamma_z(t)$ одну и только одну общую точку,*

3) *при $\mu \subset \Sigma_\mu$ функция $\chi(s, \mu)$ дифференцируема по s при $s=s(t_0, \mu)$* [*т. е. в точке пересечения $L_z(\mu)$ с $\Gamma_z(t_0)$*],

4) *при* $\mu \subset \Sigma_\mu$,

$$\left| \frac{s(t, \mu) - s(t_0, \mu)}{t - t_0} \right| < M < \infty, \tag{111}$$

5) *почти для всех* $\mu \subset \Sigma_\mu$ *существует s-быстрота сходимости семейства областей* $G_z(t)$ *при* $t \to t_0$,

6) *для параметрического представления границ*

$$\zeta = \chi(s(t, \mu), \mu) = \Omega(\mu, t) \tag{112}$$

выполняется условие A).

При этих условиях функция $F(z, t)$ [*см.* (90)] *равномерно относительно* z *внутри* $G_z(t)$ *дифференцируема по* t *при* $t = t_0$.

Действительно, как легко видеть, при указанных предположениях семейство областей $G_z(t)$, $t \subset S_t$, $|t - t_0| < \delta$, и параметрическое представление границ (112) удовлетворяют всем условиям теоремы 12.

Примечание. Условия теоремы 14 приобретают наглядность, если ввести трехмерное пространство переменных $z = x + iy$, t и рассматривать в этом пространстве тело B, пересечение которого с каждой плоскостью $t = c$, $c \subset S_t$, есть область $G_z(c)$.

§ 6

Соотношения (92) и (102) получены выше при весьма значительных ограничениях, наложенных на границы областей $G_z(t)$. Для случая последовательностей областей, вложенных друг в друга, можно установить несколько иным путем справедливость аналогичных соотношений почти при всяком $t \subset S_t$ [1], не налагая никаких ограничений на характер границ областей. Этот вопрос мы и хотим рассмотреть в заключение данной работы.

1°. Установим прежде всего одну необходимую для дальнейшего формулу.

Теорема 15. *Пусть функция* $f(w, t)$, *регулярная в* w *при* $w \subset Q_w$, $t \subset S_t$, *равномерно относительно* w *внутри* Q_w *дифференцируема по* t *при* $t = t_0$, *и пусть* $f(w, t_0)$ *имеет в* Q_w *только простые нули. Тогда во всяком круге*

$$Q_w(r): \quad |w| < r, \ r < 1, \tag{113}$$

на границе которого нет нулей $f(w, t_0)$, $\left[\frac{\partial f(w, t)}{\partial t}\right]_{t=t_0}$ *может быть представлена формулой*

$$\left[\frac{\partial f(w, t)}{\partial t}\right]_{t=t_0} = f(w, t_0) \left\{ \sum_{\nu=1}^{n_r} \left[\frac{a'_\nu(t_0)}{a^0_\nu - w} + \frac{w \overline{a'_\nu(t_0)}}{r^2 - \bar{a}^0_\nu w} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial \log |f(re^{i\theta}, t)|}{\partial t} \right]_{t=t_0} \frac{re^{i\theta} + w}{re^{i\theta} - w} d\theta + i \left[\frac{\partial \arg \chi(0, t)}{\partial t} \right]_{t=t_0} \right\}, \tag{114}$$

---

[1] См. теорему 7.

где a_ν^0 $(\nu=1, 2, \ldots, n_r)$ — *нули* $f(w, t_0)$, *принадлежащие* $Q_w(r)$, $a_\nu(t)$ — *нуль функции* $f(w, t)$, *стремящейся к* a_ν^0 *при* $t\to t_0$ [1] *и*

$$\chi(w, t)=f(w, t)\sum_{\nu=1}^{n_r}\frac{r^2-\overline{a_\nu(t)}\,w}{(w-a_\nu(t))\,r}. \tag{115}$$

Для доказательства надо только показать, что функции $a_\nu(t)$ дифференцируемы по t при $t=t_0$, так как при этом условии формула (114) получается непосредственно после дифференцирования по t левой и правой части формулы Пуассона — Иенсена.

Но дифференцируемость функций $a_\nu(t)$ при $t=t_0$ следует из того, что в известной (справедливой в нашем случае при достаточно малых $|t-t_0|$) формуле

$$a_\nu(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_\nu} w\,\frac{f'_w(w, t)}{f(w, t)}\,dw$$

[где c_ν — окружность, отделяющая нуль a_ν^0 от других нулей функции $f(w, t_0)$] — к интегралу, в силу предположений теоремы, можно применить обычное правило дифференцирования по параметру.

Отметим некоторые частные случаи формулы (114). Если $a_\nu(t)=$ $=a_\nu^0$ $(\nu=1, 2,\ldots, n_r)$ и $\arg\chi(0, t)=0$, то формула (114) принимает вид

$$\left[\frac{\partial f(w, t)}{\partial t}\right]_{t=t_0}=\frac{f(w, t_0)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial\log|f(re^{i\vartheta}, t)|}{\partial t}\right]_{t=t_0}\frac{re^{i\vartheta}+w}{re^{i\vartheta}-w}\,d\vartheta \tag{116}$$

[причем в этом случае можно и не предполагать, что нули a_ν^0 $(\nu=1, 2, \ldots, n_r)$ функции $f(w, t_0)$ — простые]. Если, в частности, $f(w, t_0)=w$, то при $w\subset Q_w(r)$

$$\left[\frac{\partial f(w, t)}{\partial t}\right]_{t=t_0}=\frac{w}{2\pi r}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial|f(re^{i\vartheta}, t_0)|}{\partial t}\right]_{t=t_0}\frac{re^{i\vartheta}+w}{re^{i\vartheta}-w}\,d\vartheta. \tag{117}$$

Предположим, далее, что

$$\left[\frac{\partial\log\left|\frac{f(w, t)}{w}\right|}{\partial t}\right]>0\quad\text{при}\quad w\subset Q_w. \tag{118}$$

Тогда в (117) можно выполнить предельный переход $r\to 1$. Выполняя этот предельный переход, получаем

$$\left[\frac{\partial f(w, t)}{\partial t}\right]_{t=t_0}=\frac{w}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\vartheta}+w}{e^{i\vartheta}-w}\,d\psi(\vartheta, t_0), \tag{119}$$

---

[1] Непрерывность функций $a_\nu(t)$ при $t=t_0$ следует по теореме Гурвица из условий теоремы.

где

$$\psi(\vartheta, t_0) = \lim_{r \to 1} \int_0^{\vartheta} \left[\frac{\partial \log |f(re^{i\theta}, t)|}{\partial t}\right]_{t=t_0} d\theta = \lim_{r \to 1} \int_0^{\vartheta} \left[\frac{\partial |f(re^{i\theta}, t)|}{\partial t}\right]_{t=t_0} d\theta \quad (120)$$

— монотонно возрастающая функция от ϑ, полная вариация которой на сегменте $0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi$ равна $2\pi \left[\frac{d \log |f'_w(0, t)|}{dt}\right]_{t=t_0}$, и интеграл в (120) понимается в смысле Стильтьеса[1].

2°. Рассмотрим снова функцию

$$z = \Phi(w, t), \quad \Phi(0, t) = 0, \quad \Phi'_w(0, t) > 0, \tag{121}$$

при каждом $t \subset S_t$ конформно отображающую круг Q_w на некоторую однолистную односвязную область $G_z(t)$, содержащую круг $|z| < \rho_0$ и содержащуюся в круге $|z| < M$. Предположим еще, что производная $\left[\frac{\partial \Phi(w, t)}{\partial t}\right]_{t=t_0}$ существует при $w \subset Q_w$.

По теореме 1, $\Phi(w, t)$ равномерно относительно w внутри Q_w непрерывна в t. Поэтому семейство областей $G_z(t)$ при $t \to t_0$ сходится как к ядру к $G_z(t_0)$. Отсюда легко заключить, что для заданного $r < 1$. области $G_z(t, r)$ при достаточно малом $|t - t_0|$ будут принадлежать $G_z(t_0)$. Следовательно, функция $u = F(z, t_0)$, обратная $\Phi(u, t_0)$, будет определена в $G_z(t, r)$ и будет одновременно осуществлять конформное отображение $G_z(t_0)$ на круг $|u| < 1$ и $G_z(t, r)$ — на некоторую область $H_u(t)$, принадлежащую кругу $|u| < 1$.

Из этих соображений вытекает, что при малых $|t - t_0|$ функция

$$u = f(w, t;\, t_0) = F(\Phi(w, t), t_0) \tag{122}$$

определена и однолистна в круге $|w| < r$. Далее,

$$f(0, t;\, t_0) = 0, \quad f(w, t_0;\, t_0) = w. \tag{123}$$

Очевидно, кроме того, что $f(w, t; t_0)$ вместе с $\Phi(w, t)$ равномерно относительно w внутри $Q_w(r)$ дифференцируема по t при $t = t_0$. Поэтому (см. теорему 15) во всяком круге $|w| < r' < r$ производная этой функции может быть представлена формулой (117).

Рассмотрим теперь отношение

$$\frac{\Phi(w, t) - \Phi(w, t_0)}{t - t_0}.$$

Так как, по (122), в круге $|w| < r$

$$\Phi(w, t) = \Phi(f(w, t;\, t_0)), \tag{124}$$

[1] См. R. Nevanlinna. Eindeutige analytische Funktionen. S. 185.

то это отношение при $|w| < r$ можно представить в виде

$$\frac{\Phi(w,t)-\Phi(w,t_0)}{t-t_0}=\frac{\Phi(f(w,t;t_0))-\Phi(w,t_0)}{(w,t;t_0)-w}\,\frac{f(w,t;t_0)-w}{t-t_0}\,^{1}. \quad (125)$$

Переходя в (125) к пределу при $t\to t_0$ и учитывая (123), имеем

$$\left[\frac{\partial\Phi(w,t)}{\partial t}\right]_{t=t_0}=\frac{\partial\Phi(w,t)}{\partial w}\left[\frac{\partial f(w,t;t_0)}{\partial t}\right]_{t=t_0}{}^{2}, \quad (126)$$

или, по (117),

$$\left[\frac{\partial\Phi(w,t)}{\partial t}\right]_{t=t_0}=w\,\frac{\partial\Phi(w,t_0)}{\partial w}\,\frac{1}{2\pi r}\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{\partial\,|f(re^{i\vartheta},t;t_0)|}{\partial t}\right]_{t=t_0}\frac{re^{i\vartheta}+w}{re^{i\vartheta}-w}\,d\vartheta. \quad (127)$$

3°. Обратимся теперь к интересующему нас частному случаю, когда при $t_1\subset S_t$, $t_2\subset S_t$, $t_1<t_2$,

$$G_z(t_1)\subset G_z(t_2).$$

Так как, по формулам (31) и (126) [или из (122)],

$$\left[\frac{\partial f(w,t;t_0)}{\partial t}\right]_{t=t_0}=-\left[\frac{\partial F(\Phi(w,t_0),t)}{\partial t}\right]_{t=t_0} \quad (128)$$

и, с другой стороны [см. (46)],

$$\Re\left[\frac{\partial\log\left|\frac{F(z,t)}{z}\right|}{\partial t}\right]_{t=t_0}<0 \quad (46)$$

(если не равна тождественно нулю), то в этом случае в (127) возможен предельный переход при $r\to 1$. Таким образом, получаем, что при $w\subset Q_w$ имеет место соотношение [см. (119)]

$$\left[\frac{\partial\Phi(w,t)}{\partial t}\right]_{t=t_0}=w\,\frac{\partial\Phi(w,t_0)}{\partial w}\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{i\vartheta}+w}{e^{i\vartheta}-w}\,d\psi(\vartheta,t_0), \quad (129)$$

где

$$\psi(\vartheta,t_0)=\lim_{r\to 1}\int\limits_0^{\vartheta}\left[\frac{\partial\,|f(re^{i\theta},t;t_0)|}{\partial t}\right]_{t=t_0}d\theta, \quad (130)$$

которое мы и хотели установить.

В частности, если

$$\psi(\vartheta,t_0)=\begin{cases}0 & \text{при}\quad 0\leqslant\vartheta<\varkappa(t_0),\\ 2\pi\left[\dfrac{d\log f'_w(0,t;t_0)}{dt}\right]_{t=t_0}= & \\ =2\pi\left[\dfrac{d\log\Phi'_w(0,t)}{dt}\right]_{t=t_0} & \text{при}\quad \varkappa(t_0)\leqslant\vartheta\leqslant 2\pi\end{cases} \quad (131)$$

---

[1] Ср. И. Базилевич, Матем. сб., 1 (43) : 2 (1936), 211—228.

[2] В силу произвольности выбора $r<1$, функция $\left[\frac{\partial f(w,t;t_0)}{\partial t}\right]_{t=t_0}$ определена, и соотношение (126) имеет место при всяком $w\subset Q_w$.

(что имеет место, например, в случаях, рассмотренных Löwner'ом[1] и Голузиным[2]), то из (129) получается известное уравнение Löwner'a

$$\left[\frac{\partial\Phi(w,t)}{\partial t}\right]_{t=t_0} = w\,\frac{\partial\Phi(w,t_0)}{\partial w}\left[\frac{d\log\Phi'_w(0,t)}{dt}\right]_{t=t_0}\frac{e^{i\varkappa(t_0)}+w}{e^{i\varkappa(t_0)}-w}. \quad (132)$$

По теореме 7 соотношение (129) [или, в частности, (132)] имеет место почти для всех $t\subset S_t$. В теореме 13 указан случай, когда левая производная $\bar{D}_t\Phi(w,t)$ удовлетворяет уравнению (129) при всяком $t\subset S_t$. В случаях, рассмотренных Löwner'ом и Голузиным, этими авторами доказано, что (132) выполняется для всех $t\subset S_t$.

НИИММ ТГУ им. В. В. Куйбышева.
Томск

(Поступило в редакцию 12 V 1941 г.)

On one-parameter families of analytic functions

P. P. Kufareff (Tomsk)

(Résumé)

Let S_t be a segment $a\leqslant t\leqslant b$. Suppose that to every $t\subset S_t$ there corresponds a smooth simply connected domain in the complex z-plane contained in the circle $|z|<R$ and containing the circle $|z|<\rho_0$. We denote by $G_z^*(t_0)$ the kernel of the family of domains $G_z(t)$ at $t\to t_0$.

Let $F(z,t)$ be a function defined for $t\subset S_t$, $z\subset G_z(t)$ and regular in z. In this paper we investigate the problem of existence as well as the properties of the partial derivative $\frac{\partial F(z,t)}{\partial t}$.

In chapter I we consider some simple cases, when the derivative $\frac{\partial F(z,t)}{\partial t}$ exists for almost all $t\subset S_t$ and is regular in $z\subset G_z^*(t)$.

In chapter II we consider the simplest cases, when $\frac{\partial F(z,t)}{\partial t}$ exists at $t=t_0$, $z\subset G_z^*(t_0)$ and is regular with respect to z. In connection with these considerations we obtain an equation [see (129)] that is a generalization of the well known Löwner's equation.

[1] Löwner, Math. Ann., 89, (1923)

[2] Golusin, Rec. math., 6 (48) : 3 (1939), 383.