УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
1946 УНИВЕРСИТЕТА имени В. В. КУЙБЫШЕВА № 1

ОБ ИНТЕГРАЛАХ ПРОСТЕЙШЕГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОДВИЖНОЙ ПОЛЯРНОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ ПРАВОЙ ЧАСТИ

Проф. П. П. КУФАРЕВ

Пусть $\alpha(t)$—вещественная непрерывная на интервале $-\infty < t < \infty$ функция, и

$$\mu(t) = e^{i\alpha(t)}. \tag{1}$$

Известно, что решение

$$w = w(t, w_0, \tau),\ w(\tau, w_0, \tau) = w_0, \tag{2}$$

уравнения Левнера:

$$\frac{dw}{dt} = w\,\frac{\mu(t) + w}{\mu(t) - w}, \tag{3}$$

рассматриваемое как функция начального значения w_0, при всяком $t < \tau$ конформно отображает круг

$$Q_{w0} : |w_0| < 1$$

на однолистную односвязную, содержащую $w = 0$ область $B_w(t,\tau)$, принадлежащую кругу Q_w *).

В связи с этим для уравнения Левнера—простейшего уравнения с подвижной полярной особенностью правой части—можно поставить задачу: охарактеризовать свойства семейства областей $B_w(t,\tau)$, если известны свойства функции $\alpha(t)$.

В данной работе доказывается, что если при $t \subset [a,b]$ $\alpha(t)$ имеет ограниченную производную, то при $a \leqslant t \leqslant \tau \leqslant b$ область $B_w(t,\tau)$ получается из $|w| < 1$ проведением разреза по простой дуге Жордана, а также выясняется закон образования семейства областей $B_w(t,\tau)$ и в некоторых других более общих случаях.

---

[1]) стр. 42.

Аналогичные выводы могут быть получены при изучении решений уравнения:

$$\frac{dw}{dt}=\frac{1}{\alpha(t)-w},$$

(которые однолистны в полуплоскости $\operatorname{Im} w_0>0$).

§ 1. Будем предполагать, что $\alpha(t)$ имеет ограниченную на всяком конечном сегменте вариацию *).

Изучим сначала решения уравнения (3), по модулю равные единице.

Выполняя замену $w=e^{i\varphi}$, сводим задачу к исследованию вещественных решений уравнения

$$\frac{d\varphi}{dt}=\operatorname{cotg}\frac{\varphi-\alpha(t)}{2}. \tag{4}$$

Будем называть решением уравнения (4) на сегменте (a,b) всякую непрерывную функцию, удовлетворяющую уравнению всюду на (a,b) за исключением, может быть, замкнутого множества, нигде не плотного на (a,b).

Если интегральная кривая $\varphi=\varphi(t)$ — гладкая, то будем кратко называть функцию $\varphi(t)$ *гладким решением*.

1. Существуют лишь два гладких решения $\varphi_1(t,\tau)$, $\varphi_2(t,\tau)$ уравнения (4), стремящиеся к $\alpha(\tau)$ при $t\to\tau+0$. Каждое из этих решений может быть единственным образом продолжено на весь интервал $t<\tau<\infty$. При таком продолжении (и при надлежащем выборе обозначений) всюду на интервале $\tau<t<\infty$ выполняются неравенства:

$$\alpha(t)-2\pi\leqslant\varphi_1(t,\tau)\leqslant\alpha(t), \tag{5$_1$}$$

$$\alpha(t)\leqslant\varphi_2(t,\tau)\leqslant\alpha(t)+2\pi. \tag{5$_2$}$$

Доказательство. Рассмотрим для уравнения:

$$\frac{dt}{d\varphi}=\operatorname{tg}\frac{\varphi-\alpha(t)}{2} \tag{4a}$$

на достаточно малом сегменте $[\varphi_0,\varphi_0+\varepsilon]$, $\varphi_0=\alpha(\tau), \varepsilon>0$, ломаные Ейлера, проходящие через точку $P(\tau,\varphi_0)$ и принадлежащие области: $0\leqslant\varphi-\alpha(t)\leqslant\pi$. Первое звено каждой ломаной принадлежит прямой $t=\tau$, и все ломаные располагаются в полуплоскости $t\geqslant\tau$. Из множества таких ломаных Ейлера можно выбрать последовательность, сходящуюся на $[\varphi_0,\varphi_0+\varepsilon]$ к интегральной кривой $t=t_2(\varphi,\tau)$ **), также лежащей в области $0\leqslant\varphi-\alpha(t)\leqslant\pi$, $t\geqslant\tau$. Так как $\dfrac{dt_2}{d\varphi}\geqslant 0$ на $[\varphi_0,\varphi_0+\varepsilon]$, и функция $t_2(\varphi,\tau)$ не может быть постоянной ни на каком интервале, то обратная функция $\varphi=\varphi_2(t,\tau)$ однозначно определена на сегменте $[\tau,\tau+h]$; $h=t_2(\varphi_0+\varepsilon,\tau)$. Эта функция является решением уравнения (4), обладающим на $[\tau,\tau+h]$ указанными в теореме свойствами.

*) Впрочем, это условие используется лишь начиная с п. 8.

**) 2) стр. 66.

Докажем единственность гладкого решения $\varphi_2(t,\tau)$. Из (4) находим, что разность

$$u=\varphi_2(t,\tau)-\varphi_2^*(t,\tau)$$

двух решений, для которых на $[\tau,\tau+h]$ выполняется неравенство (52), удовлетворяет уравнению:

$$\frac{du}{dt}=-u\,f(t),$$

где $f(t)$ — неотрицательная на $[\tau,\tau+h]$ функция. Но интегральная кривая $u=u(t)$ этого уравнения может лишь в том случае проходить через точку $t=\tau$, $u=0$, если на всем сегменте $[\tau,\tau+h]$ $u\equiv 0$.

Также доказывается существование и единственность решения $\varphi_1(t,\tau)$.

Остается указать, как решение $\varphi_2(t,\tau)$ ($\varphi_1(t,\tau)$) гладко продолжается на весь интервал $\tau<t<\infty$.

Пусть $\varphi_2(t,\tau)$ определено на интервале $\tau<t<t_0$ и удовлетворяет на нем неравенствам (5_2). При $t\to t_0-0$ $\varphi_2(t,\tau)$ стремится к определенному пределу (ибо в противном случае кривая $\varphi=\alpha(t)+\pi$, на которой располагаются экстремумы интегральной кривой $\varphi=\varphi_2(t,\pi)$, была бы разрывна при $t=t_0$). Если $\lim\varphi_2(t,\tau)$ не равен ни $\alpha(t_0)$, ни $\alpha(t_0)+2\pi$, то продолжение решения осуществляется обычным образом. Если при $t\to t_0-0$ $\varphi_2(t,\tau)\to\alpha(t_0)$ (в этом случае возрастая), то принимаем за продолжение решения $\varphi_2(t,\tau)$ решение $\varphi_2(t,t_0)$. Наконец, если $\varphi_2(t,\tau)\to\alpha(t_0)+2\pi$ (убывая), то гладким продолжением будет решение $\varphi_1(t,t_0)+2\pi$.

Аналогично определяется гладкое продолжение для $\varphi_1(t,\tau)$.

При других способах продолжения интегральные кривые могут иметь точки возврата на особых линиях

$$\gamma_s:\varphi=\alpha(t)+s\pi\ (s=0,\pm 2,\pm 4,\dots) \tag{5}$$

уравнения (4).

§ 2. Всякое решение уравнения (4), стремящееся к $\alpha(\tau)$ при $t\to\tau-0$, будем обозначать $\varphi_-(t,\tau)$.

Возможность существования таких решений следует из теоремы:

2. Если на интервале $\tau-h<t<\tau$, $h>0$, выполняется неравенство:

$$|\alpha(t)-\alpha(\tau)|\geqslant 4\sqrt{\tau-t}, \tag{6}$$

то всякая гладкая интегральная кривая, проходящая через произвольную точку области A, ограниченной кривыми γ_0, $t = \tau - h$ и

$$C_\delta : \varphi = \alpha(\tau) + 2\delta\sqrt{\tau - t}, \quad \delta = \frac{\alpha(t) - \alpha(\tau)}{|\alpha(t) - \alpha(\tau)|} = \pm 1, \tag{7}$$

проходит через точку $P(\tau, \alpha(\tau))$.

Докажем теорему для случая, когда

$$\alpha(t) - \alpha(\tau) \geqslant 4\sqrt{\tau - t} \tag{6a}$$

($\delta = 1$). Пусть Q — какая-либо точка области A. При возрастании t интегральная кривая, выходящая из Q, не может выйти из A в точках параболы C_1, так как в силу неравенства (6a) в точках параболы C_1 угол наклона параболы меньше угла наклона интегральных кривых уравнения (5):

$$\operatorname{cotg} \frac{\alpha(\tau) + 2\sqrt{\tau - t} - \alpha(t)}{2} > -\frac{1}{\sqrt{\tau - t}}.$$

При гладком продолжении интегральная кривая не выходит из A и через кривую γ_0. Следовательно, она пройдет через P.

С другой стороны:

3. Если при $\tau - h < t < \tau$ выполняется неравенство:

$$|\alpha(t) - \alpha(\tau)| \leqslant 4q\sqrt{\tau - t}, \quad q < 1, \tag{8}$$

то гладких решений $\varphi_-(t,\tau)$ не существует.

Докажем, например, что всякая гладкая интегральная кривая C, проходящая через произвольную точку $Q(t_1, \varphi_1)$ области

$$\varphi \geqslant \alpha(t), \ t \leqslant \tau$$

и, следовательно, при $t_1 \leqslant t \leqslant \tau$ принадлежащая этой области, не проходит через P.

Фиксируем число $q', q < q' < 1$. Интегральная кривая Г:

$$\varphi = -\varepsilon \cos\vartheta \exp\left(-\frac{q'}{\sqrt{1-q'^2}}\vartheta\right) + \alpha(\tau),$$

$$\tau - t = \frac{\varepsilon^2}{4}\left(q'\sin\vartheta + \sqrt{1-q'^2}\cos\vartheta\right)^2 \exp\left(-\frac{2q'}{\sqrt{1-q'^2}}\vartheta\right),$$

$$-\operatorname{arctg}\frac{q'}{\sqrt{1-q'^2}} \leqslant \vartheta \leqslant \pi - \operatorname{arctg}\frac{q'}{\sqrt{1-q'^2}},$$

уравнения:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2}{\varphi - \alpha(\tau) + 4q'\sqrt{\tau - t}} \tag{10}$$

принадлежит полуплоскости $t \leqslant \tau$ и имеет с прямой $t = \tau$ две общих точки, одна из которых, S, лежит выше P, другая — ниже P.

Следовательно, Г пересекается с особой линией γ_0 (см. (5)). Пусть T — первая из точек пересечения Г с γ_0 при движении по Г от S и Γ_0 — дуга кривой Г, соединяющая S с T. При достаточно малом ε:

а) Точка Q лежит вне области D, ограниченной дугой Γ_0, отрезком SP прямой $t = \tau$ и дугой TP кривой γ_0; б) в силу неравенства (8) и непрерывности функции $\alpha(t)$, всюду на Γ_0 выполняется неравенство:

$$\operatorname{cotg}\frac{\varphi - \alpha(t)}{2} > \frac{2}{\varphi - \alpha(\tau) + 4q'\sqrt{\tau - t}}. \tag{11}$$

Кроме того, так как интегральная кривая C ни на каком интервале не может совпадать всюду с γ_0, то можно всегда подобрать ε так, что точка T не будет принадлежать C.

Из а) следует, что если кривая C проходит через P, она входит в область D в некоторой внутренней точке кривой Γ_0; но этого не может быть, так как в точке входа будет нарушаться неравенство (11).

Далее, легко устанавливаются следующие свойства решений уравнения (4):

4. Если существует интегральная кривая $\varphi = \varphi_-(t,\tau)$, то, какова бы ни была точка $Q(t', \varphi')$, $t' < \tau$, лежащая между кривыми $\varphi = \varphi_-(t,\tau)$ и γ_0, интегральная кривая, проходящая через Q, при надлежащем способе продолжения ее, также проходит через $P(\tau, \alpha(\tau))$. В частности, если кривая $\varphi = \varphi_-(t,\tau)$ — гладкая, то гладкая интегральная кривая, проходящая через Q, также проходит через P.

Таким образом, или для данного τ не существует ни одного решения $\varphi_-(t,\tau)$, или таких решений существует бесконечно много. Из (4a) следует, что если гладкие решения $\varphi_-(t,\tau)$ существуют, то левая производная $D_e\alpha(\tau)$ в точке $t = \tau$ равна $+\infty$ или $-\infty$.

Произвольная окрестность всякой точки интегральной кривой содержит гладкие дуги этой кривой. Поэтому, если для данного τ существует решение $\varphi_-(t,\tau)$, то точка $(\tau, \alpha(\tau))$ является или правым концом гладкой дуги кривой $\varphi = \varphi_-(t,\tau)$ или предельной для правых концов $(\tau_n, \alpha(\tau_n))$ гладких дуг этой интегральной кривой. Следовательно, множество значений τ, для которых существуют решения $\varphi_-(t,\tau)$, принадлежит замыканию множества точек τ, в которых $D\,\alpha(\tau) = \pm\infty$.

§ 3. Перейдем к рассмотрению некоторых свойств произвольных решений $w(t) = re^{i\varphi}$ уравнения (3), эквивалентного двум уравнениям:

$$\frac{dr}{dt} = r\,\frac{1 - r^2}{|\mu(t) - w|^2}, \tag{12}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2r\sin(\varphi - \alpha(t))}{|\mu(t) - w|^2}. \tag{13}$$

5. Если $|w_0| < 1$, то $|w(t,w_0,\tau)|$ возрастает (при возрастании t). Если $|w_0| = 1$, то при $t > \tau$ $|w(t,w_0,\tau)| = 1$. Если же $|w_0| = 1$ и $w_0 \neq \mu(\tau)$, то $|w(t,w_0,\tau)| = 1$ и при достаточно близких к τ значениях $t < \tau$.

6. Если $w(t)$—решение уравнения (3), то и $w^*(t) = \frac{1}{\overline{w(t)}}$ также решение. Поэтому достаточно изучить решения, по модулю не превышающие единицы. Далее рассматриваются только такие решения.

7. Пусть $w(t)$—решение, модуль которого стремится к единице при $t \to \tau - 0$, оставаясь меньше единицы при $t < \tau$. Тогда

$$\lim_{t \to \tau - 0} w(t) = \mu(t). \tag{14}$$

Доказательство. Пусть при $\tau - \delta < t < \tau$, $\delta > 0$,

$$|\alpha(t) - \alpha(\tau)| < \varepsilon,\ \varepsilon < \frac{\pi}{2}. \tag{15}$$

Фиксируем некоторое $t' \subset (\tau - \delta, \tau)$, и построим в плоскости (t,φ) прямоугольник

$$H_0 : \tau - \delta < t < \tau,\ |\varphi - \alpha(\tau)| < \pi + \varepsilon.$$

Выбирая соответствующим образом ветвь функции $\varphi(t)$, можно считать, что точка $Q(t',\varphi(t'))$ принадлежит H_0. Кривая $\varphi = \varphi(t)$ при $t' < t < \tau$ не выходит из H_0, так как в силу (15) на верхней стороне $\varphi = \alpha(t) + \pi + \varepsilon$ прямоугольника H_0 правая часть уравнения (13) отрицательна, а на нижней—положительна. Далее, если

$$\overline{\lim_{t \to \tau - 0}}\, \varphi(t) - \underline{\lim_{t \to \tau - 0}}\, \varphi(t) = p > 0,$$

то $\varphi(t)$ имеет вблизи τ бесконечно много экстремумов; в силу (13) при этих значениях t $\varphi(t) = \alpha(t)$, *) откуда следует, что колебание слева в точке $t = \tau$ функции $\alpha(t)$ не меньше p, что противоречит

*) Случаи $\varphi(t) = \alpha(t) \pm \pi$ не могут иметь места. Если, например, $\varphi(t'') = \alpha(t'') + \pi$, $t'' \subset (\tau - \delta, \tau)$, то из (15) и (13) следует, что при $t'' < t < \tau$ кривая $\varphi = \varphi(t)$ принадлежит полосе:

$$\pi - \varepsilon < \varphi - \alpha(\tau) < \pi + \varepsilon \tag{*}$$

Затем также, как в тексте, доказывается, что $\lim_{\tau \to t - 0} \varphi(t)$ существует и равен $\alpha(\tau)$, что противоречит неравенствам(*).

предположению о непрерывности $\alpha(t)$. Итак, $\lim_{t \to \tau - 0} \varphi(t) = \varphi_0$ существует, следовательно, существует и $\lim_{t \to \tau - 0} w(t) = w_0 = e^{i\varphi_0}$. Наконец, $w_0 = \mu(\tau)$, так как в противном случае решение уравнения (3), принимающее при $t = \tau$ значение $w_0 \neq \mu(\tau)$, (определяемое вблизи $t = \tau$ единственным образом), при близких к τ значениях $t < \tau$ равнялось бы по модулю единице и поэтому не могло бы совпадать с $w(t)$.

Всякое решение $w(t)$, стремящееся к $\mu(\tau)$ при $t \to \tau - 0$, для которого $|w(t)| < 1$ при $t < \tau$, будем обозначать $v(t,\tau)$. Решение, для которого $\lim_{t \to \tau = 0} w(t) = \mu(\tau)$ и $|w(t)| \leqslant 1$ при $t < \tau$, будем обозначать $w_-(t,\tau)$. (Таким образом, всякое решение $v(t,\tau)$ есть $w_-(t,\tau)$.

Каждое решение $w_-(t,\tau)$ может быть продолжено (не единственным образом) на интервал $\tau < t < \infty$. Решение $v(t,\tau)$ может быть продолжено и на интервал $-\infty < t < \tau$.

8. Каков-бы ни был сегмент (a,b), для всякого решения $w(t) = re^{i\varphi}$ уравнения (3), определенного на этом сегменте.

$$\bigvee_a^b (\varphi) \leqslant \bigvee_a^b (\alpha) + \pi. \tag{16}$$

Рассмотрим сначала частный случай, когда кривая

$$C : \varphi = \varphi(t),\ a \leqslant t \leqslant b, \tag{17}$$

пересекается лишь с одной из кривых γ_s (см. (5)), пусть с γ_0, и $\varphi(a) = \alpha(a)$, $\varphi(b) = \alpha(b)$. Пусть дано произвольное разбиение интервала (a,b) на частичные интервалы (a_k,a_{k+1}), $k = 0,1,2,\ldots n-1$, $a_0 = a$, $a_k = b$. Построим другое разбиение на интервалы (b_s,b_{s+1}), $s = 0,1,\ldots m-1$, $b_0 = a, b_m = b$, следующим образом: все точки a_k входят в множество точек b_s; если $\varphi(a_k) = \alpha(a_k), \varphi(a_{k+1}) = \alpha(a_{k+1})$, то между a_k и a_{k+1} не вставляется новых точек деления; если $\varphi(a_k) \neq \alpha(a_k)$, то в число точек деления включаются ближайшие к a_k слева и справа точки, в которых $\varphi(t) = \alpha(t)$. Очевидно,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left| \varphi(a_{k+1}) - \varphi(a_k) \right| \leqslant \sum_{s=0}^{m-1} \left| \varphi(b_{s+1}) - \varphi(b_s) \right|. \tag{18}$$

Далее, рассматриваем третий способ разбиения на частичные интервалы (c_p,c_{p+1}), $p = 0,1,\ldots q, c_0 = a, c_q = b$, полученный из второго выбрасыванием тех точек b_s, в которых $\varphi(b_s) \neq \alpha(b_s)$. Если

$\varphi(b_i) \neq \alpha(b_i)$, то на интервале (b_{i-1}, b_{i+1}) $\varphi(t) - \alpha(t)$ сохраняет знак, и по (13) $\varphi(t)$ изменяется монотонно. Поэтому

$$|\varphi(b_i) - \varphi(b_{i-1})| + |\varphi(b_{i+1}) - \varphi(b_i)| = |\varphi(b_{i+1}) - \varphi(b_{i-1})|,$$

и следовательно,

$$\sum_{s=0}^{m-1} \left| \varphi(b_{s+1}) - \varphi(b_s) \right| = \sum_{p=0}^{q-1} \left| \varphi(c_{p+1}) - \varphi(c_p) \right| =$$

$$= \sum_{p=0}^{q-1} \left| \alpha(c_{p+1}) - \alpha(c_p) \right| \leqslant \bigvee_a^b (\alpha). \qquad (19)$$

В силу произвольности выбора точек a_k из (18) и (19) следует, что

$$\bigvee_a^b (\varphi) \leqslant \bigvee_a^b (\alpha). \qquad (20)$$

Перейдем к общему случаю. Интервал (a,b) можно разбить на конечное число интервалов двух типов: 1. Интервалы типа Δ', на которых кривая C пересекается лишь с одной из кривых γ_s и на концах которых $\varphi(t) = \alpha(t) + s\pi$; 2. Интервалы Δ'', на которых C принадлежит лишь одной из полос

$$H_m : \alpha(t) + m\pi \leqslant \varphi(t) \leqslant \alpha(t) + (m+1)\pi, \qquad (21)$$

причем на одном конце такого интервала $\varphi(t) = \alpha(t) + m\pi$, на другом $\varphi(t) = \alpha(t) + (m+1)\pi$ (исключение могут представлять крайние интервалы). Интервалы Δ'', в свою очередь, разобьем на 2 класса: Δ''_1—интервалы, на левом конце которых $\varphi(t) = \alpha(t) + (2p+1)\pi$, и Δ''_2—интервалы, на левом конце которых $\varphi(t) = \alpha(t) + 2p\pi$. Если $\varphi(a) \neq \alpha(a) + \kappa\pi$ $(\varphi(b) \neq \alpha(b) + \kappa\pi)$, то интервал (a, a') $((b', b))$, где a' (b')—ближайшая к a (b) из абсцисс точек пересечения C с кривыми γ_s, относится к классу Δ'_1, если $\varphi(a') = \alpha(a') + 2p\pi$ $(\varphi(b') = \alpha(b') + (2p+1)\pi)$, и к классу Δ''_2, если

$$\varphi(a') = \alpha(a') + (2p+1)\pi \ (\varphi(b') = \alpha(b') + 2p\pi).$$

Между каждыми двумя интервалами класса Δ''_1 находится по крайней мере один интервал Δ''_2, и наоборот. Поэтому число n_2 интервалов класса Δ''_2 может отличаться от числа n_1 интервалов класса Δ''_1, не больше чем на единицу:

$$n_1 - 1 \leqslant n_2 \leqslant n_1 + 1. \qquad (22)$$

В силу (13) на интервалах Δ'' $\varphi(t)$ изменяется монотонно. Отсюда следует, что на интервалах (c,d) класса Δ''_1

$$\bigvee_c^d (\varphi) \leqslant \bigvee_c^d (\alpha) - \pi. \qquad (23)$$

между тем как на интервалах класса Δ''_2

$$\bigvee_c^d (\varphi) \leqslant \bigvee_c^d (\alpha) + \pi. \qquad (24)$$

Наконец, по доказанному выше (см. 21) на интервалах типа Δ'

$$\bigvee_c^d (\varphi) \leqslant \bigvee_c^d (\alpha). \qquad (25)$$

Из этих неравенств и (22) следует, что

$$\bigvee_a^b (\varphi) \leqslant \bigvee_a^b (\alpha) + \pi. \qquad (16)$$

9. Из (12) и (16) следует, что интегральные кривые $w = w(t)$, $|w| \leqslant 1$, уравнения (3) спрямляемы и длины их равномерно ограничены (на фиксированном интервале):

$$\int_a^b |dw(t)| \leqslant \int_a^b |d\varphi(t)| + \int_a^b dr(t) \leqslant \bigvee_a^b (\alpha) + \pi + 1. \qquad (26)$$

10. Если последовательность решений $\{w_n(t)\}$ сходится на (a,b) и если мера множества M_n значений $t \subset [a,b]$, в которых $w_n(t) = \mu(t)$, стремится к нулю при $n \to \infty$, то предельная функция:

$$w(t) = \lim w_n(t)$$

также является решением уравнения (3).

Доказательство. Множество N значений $t \subset (a,b)$, в которых $w(t) \neq \mu(t)$, открыто, так как если для данного $t_0 \subset (a,b)$ $w(t_0) \neq \mu(t_0)$, то существует интервал, содержащий t_0, на котором решение $w(t, w_0, t_0)$ не принимает значения $\mu(t)$, и на этом интервале $w(t) \equiv w(t, w_0, t_0)$.

Следовательно, множество M значении $t \subset [a,b]$, на котором $w(t) = \mu(t)$, замкнуто. Докажем, что $\operatorname{mes} M = 0$. Предполагая противное, $\operatorname{mes} M = s > 0$, выделим из M по теореме Егорова множество M', $\operatorname{mes} M' > \frac{2s}{3}$, на котором $\{w_n(t)\}$ сходится равномерно. Для данного $\varepsilon > 0$, при достаточно больших значениях n $\operatorname{mes} (M' - M_n) > \frac{s}{2}$ и

$$|w_n(t) - \mu(t)| < \varepsilon \quad \text{на} \quad M' - M_n,$$

откуда:

$$\int_c^b |dw_n(t)| \geqslant \int_{M'-M_n} |dw_n(t)| = \int_{M'-M_n} \left| w_n(t)\, \frac{\mu(t)+w_n(t)}{\mu(t)-w_n(t)} \right| dt > \frac{(1-\varepsilon)(2-\varepsilon)}{2\varepsilon}\, s.$$

При достаточно малом ε это неравенство находится в противоречии с (26).

Функция $w(t)$ непрерывна на (a,b) и удовлетворяет на интервалах, составляющих N, уравнению (3). Итак, $w(t)$ является на (a,b) решением уравнения (3).

Если M не пусто и $a' \geqslant a$—ближайшая к a из точек M, то на (a',b) $|w(t)| = 1$ (см. п. 5).

11. Каково-бы ни было τ, существует по крайней мере одно решение $w_-(t,\tau)$.

Действительно, пусть $w_o^{(n)}$—произвольная последовательность точек круга $|w| < 1$, сходящаяся к $\mu(\tau)$; выделим из последовательности решений $w(t,\omega_o^{(n)}\tau)$, применяя (дважды, к $\arg w$ и $|w|$) теорему Хелли*), подпоследовательность, сходящуюся на сегменте $[\tau-1,\tau]$. Предельная функция ее является решением $w_-(t,\tau)$.

Всякое значение τ, для которого существует более одного решения $w_-(t,\tau)$ назовем особым.

Множество значений, принимаемых при данном t всеми решениями $w_-(t;x)$, $t \leqslant x \leqslant \tau$ $(w_-(t,t) = \mu(t))$, обозначим через $D_w(t,\tau)$. Можно показать, что $D_w(t,\tau)$ континуум.

12. Какова бы ни была точка ω_0, $|\omega_0| = 1$, существует по крайней мере одно решение $\omega(t)$, $\lim\limits_{t\to\tau-0}\omega(t) = \omega_0$, являющееся предельным для некоторой последовательности решений $w(t, w_o^{(n)},\tau)$, $|w_o^{(n)}| < 1$, $w_o^{(n)} \to \omega_0$. Такие решения обозначим $\omega(t,\omega_0,\tau)$. Множество значений, принимаемых при фиксированных t,τ всеми решениями $\omega(t,w_0,\tau)$, обозначим $\Gamma_w(t,\tau)$. Можно показать, что $\Gamma_w(t,\tau)$—континуум.

§ 4. Из всего предыдущего непосредственно следует теорема: Функция $w(t,w_0,\tau)$ при любых t,τ, $t \leqslant \tau$, взаимно-однозначно и конформно отображает $|w_0| < 1$ на однолистную, односвязную, содержащую $w = 0$ и принадлежащую кругу $|w| < 1$ область $B_w(t,\tau)$ **). Эта область получается из $|w| < 1$ вычитанием континуума $D_w(t,\tau)$: $B_w(t,\tau) = Q_w - D_w(t,\tau)$. Границей $B_w(t,\tau)$ является континуум $\Gamma_w(t,\tau)$. Граничной точке ω_0, $|\omega_0| = 1$, соответствует при отображении $w = w(t,w_0,\tau)$ простой конец, **) образованный значениями всех решений $\omega(t,\omega_0,\tau)$ ***).

§ 5. Остановимся далее на двух простейших случаях.

1. Полусегмент $(t_0,\tau_0]$ не содержит особых точек.

Для $\tau \subset (t_0,\tau_0]$, $|w_-(t,\tau)|$ не может равняться единице при $t < \tau$, так как в противном случае для этого значения τ существовало бы бесконечно много решений $w_-(t,\tau)$. (См. § 2, п. 4). Следовательно, $w_-(t,\tau)$ есть $v(t,\tau)$. Область $B_w(t_0,\tau_0)$, на которую круг $|w_0| < 1$ отображается функцией $w = w(t_0,w_0,\tau_0)$, получается из круга $|w| < 1$ выбрасыванием множества

$$\Gamma_w(t_0,\tau_0):\ w = v(t_0,\tau),\ t_0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0. \tag{27}$$

Используя теорему 10 и предположение о единственности $w_-(t,\tau')$ при $\tau' \subset (t_0,\tau_0]$, легко доказать, что

$$\lim_{\tau\to\tau'} v(t_0,\tau) = v(t_0,\tau') \text{ при } \tau' \subset [t_0,\tau_0].$$

Далее, $v(t_0,t_0) = \mu(t_0)$, но при $\tau > t_0$ $|v(t_0,\tau)| < 1$; и если $\tau' \neq \tau''$, то $v(t,\tau') \neq v(t,\tau'')$. Таким образом, $\Gamma_w(t_0,\tau_0)$ является простой кривой Жордана, начинающейся в точке $w = \mu(t_0)$ и (при $\tau > t_0$) принадлежащей $|w| < 1$. $B_w(t_0,\tau_0)$ получается из $|\omega| < 1$ проведением разреза по простой дуге Жордана $\Gamma_w(t_0,\tau_0)$.

Пусть $w_k^{(n)}$ последовательность точек круга $|w_0| < 1$, сходящаяся к

$$\omega_k(\tau_0,\tau) = e^{i\varphi_k(\tau_0,\tau)} (\kappa = 1 \text{ или } 2). \tag{28}$$

Последовательность решений $w(t,w_k^{(n)},\tau_0)$ сходится на $[\tau,\tau_0]$ к $\omega_k(t,\tau)$ и на $[t_0,\tau]$ к $v(t_0,\tau)$. В частности, $w(t_0,w_k^{(n)},\tau_0) \to v(t_0,\tau)$. Следовательно, двумя граничными точками, соответствующими точке $w = v(t_0,\tau)$ при отображении $B_w(t_0,\tau_0)$ на $|w_0| < 1$, являются $\omega_1(\tau_0,\tau)$ и $\omega_2(\tau_0,\tau)$.

2. Полусегмент $(t_0,\tau_0]$ содержит одну особую точку $t = \tau_0$, $B_w(t_0,\tau_0)$ получается из $|w| < 1$ выбрасыванием точек кривой

$$\gamma_w(t_0,\tau_0):\ w = v(t_0,\tau),\ t_0 \leqslant \tau < \tau_0,$$

и множества $W_-(t_0,\tau_0)$ значений, принимаемых при $t = t_0$ решениями $w_-(t,\tau_0)$. Множество $a_-(t_0\tau_0)$ точек, предельных для $v(t_0\tau)$ при $\tau \to \tau_0 - 0$, принадлежит $W_-(t_0,\tau_0)$. Можно показать, что $\gamma_w(t_0,\tau_0) \subset \Gamma_w(t_0,\tau_0)$ (границе области $B_w(t_0,\tau_0)$). Следовательно, и $a_-(t_0,\tau_0) \subset \Gamma_w(t_0,\tau_0)$. С другой стороны, всякая точка $\Gamma_w(t_0,\tau_0)$, принадлежащая $|w| < 1$, принадлежит $\gamma_w(t_0,\tau_0) + a_-(t_0,\tau_0)$. Точке

---

*) 4). стр. 184. **) 1.

**) 3), стр. 97.

***) Не выяснено, может ли этот простой конец в рассматриваемом случае, когда $\alpha(t)$ не только непрерывна, но и ограниченной вариации, содержать более одной точки.

$w_0 = \mu(\tau_0)$ при отображении $w = w(t_0, w_0, \tau_0)$ соответствует простой конец, образованный всеми точками w множества $a_-(t_0,\tau_0)$.

В частности, если $a_-(t_0,\tau_0)$ состоит из одной точки a, кривая Жордана $\gamma_w(t_0,\tau_0) + a$ необходимо разделяет $|w| < 1$ на две области, $B_w(t_0,\tau_0)$ и $B_w^{(1)}(t_0,\tau_0)$ (так как в противном случае существовало-бы только одно решение $w_-(t,\tau_0) \equiv w(t,a,\tau_0)$). Следовательно, или $|a| = 1$ или $a = v(t_0,\tau_0')$, $t_0 < \tau_0' < \tau^0$. Множество $W_-(t_0,\tau_0)$ тождественно с $B_w^{(1)}(t_0,\tau_0)$*).

§ 6. Рассмотрим в частности случай, когда $\alpha(t)$ имеет при $a \leqslant t \leqslant b$ ограниченную производную;

$$|\alpha'(t)| \leqslant K. \tag{29}$$

Выполняя в (3) замену:

$$y = -\left(\frac{\mu(t) - w}{\mu(t) + w}\right)^2, \tag{30}$$

получим уравнение

$$\frac{dy}{dt} = (1 + y)(1 + \sqrt{y}\,\alpha'(t)). \tag{31}$$

Построим на сегменте $[a,\tau]$, $a < \tau \leqslant b$, последовательность функций;

$$y_n = \int_\tau^t (1 + y_{n-1})\,(1 + \sqrt{y_{n-1}}\,\alpha'(x))\,dx, \tag{32}$$

$$y_1 = t - \tau,$$

где для $\sqrt{y_{n-1}(x,\tau)}$ берется значение с неотрицательной вблизи $t = \tau$ мнимой частью.

Последовательно для $y_1, y_2 \ldots, y_n$ доказывается, что существует сегмент $[\tau - h, \tau]$, $h = h(K) > 0$, на пересечении которого с $[a,b]$ функции $y_n(t,\tau)$ удовлетворяют неравенствам:

$$|y_n| \leqslant A(\tau - t),$$

$$\operatorname{Im}\sqrt{y_n} \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{\tau - t}, \tag{33}$$

$$|y_n - y_{n-1}| \leqslant \frac{[B(\tau - t)]^{\frac{n+1}{2}}}{(n+1)!}$$

(A, B — постоянные, зависящие только от K).

Пользуясь этими неравенствами, обычным образом доказываем что:

а) Последовательность $y_n(t,\tau)$ равномерно на $[\tau - h, \tau] \cdot [a,b]$ сходится к решению $y(t,\tau)$ уравнения (32), б) $y(t,\tau)$ и $\overline{y(t,\tau)}$ — единственные решения уравнения (32), стремящиеся к нулю при $t \to \tau - 0$;

в) производная $\dfrac{\partial y}{\partial \tau}$ при $t < \tau$ существует и равна:

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = -\exp \int_\tau^t \left(1 + \frac{1 + 3y}{2\sqrt{y}}\,\alpha'(x)\right) dx. \text{*)} \tag{34}$$

Возвращаясь к уравнению (3) (и привлекая еще известные теоремы о продолжении решений дифференциальных уравнений) приходим к выводу:

Пусть $\alpha(t)$ имеет на $[a,b]$ ограниченную производную. Тогда при любом $\tau \subset (a,b]$ существует лишь одно решение $w_-(t,\tau) \equiv v(t,\tau)$; $v(t,\tau)$ непрерывна в области

$$\overline{\Delta}: a \leqslant \tau \leqslant b,\ a \leqslant t \leqslant \tau, \tag{35}$$

и имеет при $t \neq \tau$ производные по t и τ; $\dfrac{\partial v}{\partial \tau}$ равна:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = -v(t,\tau)\,\frac{\mu(t) + v(t,\tau)}{\mu(t) - v(t,\tau)} \exp\left\{\frac{1}{2}\int_\tau^t \left[\frac{\mu(x) + v(x,\tau)}{\mu(x) - v(x,\tau)} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\mu(x) - v(x,\tau)}{\mu(x) + v(x,\tau)}\right] \alpha'(x)\,dx\right\}; \tag{36}$$

---

*) Пользуясь формулой:

$$w(t_0, w(t, w_0, \tau_0), t) \equiv w(t_0, w_0, \tau_0),$$

можно на основании предыдущих выводов выяснить вид области $B_w(t_0,\tau_0)$ также в случае, когда $(t_0,\tau_0]$ содержит конечное число особых значений t.

*) 2) стр. 280.

функции:

$$v_\tau(t,\tau)=\sqrt{\tau-t}\,\frac{\partial v}{\partial\tau},\ v_\tau(\tau,\tau)=-\mu(\tau),$$
$$v_t(t,\tau)=\sqrt{\tau-t}\,\frac{\partial v}{\partial t},\ v_t(\tau,\tau)=\mu(\tau),\tag{37}$$

непрерывны в $\overline{\Delta}$ и не принимают в $\overline{\Delta}$ значения нуль.

Аналогично доказываются соответствующие свойства и формулы для $\omega_1(t,\tau)$, $\omega_2(t,\tau)$.

Следовательно, если $\alpha(t)$ имеет на $[a,b]$ ограниченную производную, то при любых; t_0, τ_0, $a\leqslant t_0\leqslant\tau_0\leqslant b$, область $B_w(t_0,\tau_0)$ получается из $|w|<1$ проведением разреза по гладкой кривой

$$\Gamma_w(t_0,\tau_0)\ :\ w=v(t_0,\tau),\ t_0\leqslant\tau\leqslant\tau_0)\tag{38}$$

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1) Голузин—Успехи математических наук, том VI, (1946).
2) Степанов—„Курс дифференциальных уравнений", (1939).
3) Монтель—„Нормальные семейства аналитических функций", (1936).
4) Натансон—„Основы теории функций вещественной переменной", (1941)