Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXV, № 3

МАТЕМАТИКА

Н. В. ПОПОВА

ОБ ОТОБРАЖЕНИЯХ, ОСУЩЕСТВЛЯЕМЫХ ИНТЕГРАЛАМИ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 27 I 1949)

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dw}{dt}=P(w,t), \tag{1}$$

где $P(w,t)$ есть функция комплексного переменного w и действительного переменного t, рациональная относительно w при всяком t, принадлежащем некоторому замкнутому интервалу $[a,b]$, и удовлетворяющая следующим условиям.

I. Число m полюсов функции $P(w,t)$ и порядок каждого полюса не изменяются с изменением t.

II. Функции $\lambda_i(t)$ $(i=1,\ 2,\dots,m)$, представляющие подвижные полюсы $P(w,t)$, и коэффициенты $A_{ik}(t)$ разложения $P(w,t)$ по степеням разностей $w-\lambda_i(t)$ имеют на $[a,b]$ непрерывные производные.

Пусть функция $P(w,t)$ имеет в точке $w=\lambda_i(t)$ полюс порядка $n_i>0$ и в бесконечности — полюс порядка $n_0\geqslant 0$.

Обозначим через $\alpha_{ik}(t)$ $(k=1,2,\dots,n_i)$ корни уравнения

$$(\alpha_i(t))^{n_i+1}=-\frac{1}{(n_i+1)A_{i0}(t)}\qquad\left(A_{i0}(t)=\lim_{w\to\lambda_i(t)}P(w,t)(w-\lambda_i(t))^{n_i}\right).$$

Если $n_0>1$, то через α_{0j} $(j=1,\ 2,\dots,\overline{n}_0-1)$ обозначим корни уравнения

$$(\alpha_0(t))^{n_0-1}=\frac{1}{(n_0-1)A_{0n_0}(t)}\qquad\left(A_{0n_0}(t)=\lim_{w\to\infty}\frac{P(w,t)}{w^{n_0}}\right).$$

Далее, обозначим через $\omega_{ik}(t,\tau)$ $(t<\tau)$ и $v_{ik}(t,\tau)$ $(t>\tau)$ интегралы уравнения (1), удовлетворяющие, соответственно, соотношениям:

$$\lim_{t\to\tau-0}\omega_{ik}(t,\tau)=\lambda_i(\tau),\qquad\lim_{t\to\tau-0}\frac{\sqrt[n_i+1]{\tau-t}}{\omega_{ik}(t,\tau)-\lambda_i(t)}=\alpha_{ik}(\tau), \tag{2}$$

$$\lim_{t\to\tau+0}v_{ik}(t,\tau)=\lambda_i(\tau),\qquad\lim_{t\to\tau+0}\frac{\sqrt[n_i+1]{\tau-t}}{v_{ik}(t,\tau)-\lambda_i(t)}=\alpha_{ik}(\tau). \tag{3}$$

Аналогично, если $n_0>1$, будем обозначать через $\omega_{0j}(t,\tau)$ $(t<\tau)$ и $v_{0j}(t,\tau)$ $(t>\tau)$ интегралы, для которых выполняются, соответственно, соотношения:

$$\lim_{t\to\tau-0}\omega_{0j}(t,\tau)=\infty,\qquad\lim_{t\to\tau-0}(\omega_{0j}(t,\tau)\sqrt[n_0-1]{\tau-t})=\alpha_{0j}(t), \tag{4}$$

$$\lim_{t\to\tau+0} v_{0j}(t,\tau)=\infty, \qquad \lim_{t\to\tau+0} (v_{0j}(t,\tau)\sqrt[n_0-1]{\tau-t})=\alpha_{0j}(\tau). \tag{5}$$

Теорема 1. *При любом* $\tau\subset(a,b]$ *уравнение* (1) *имеет единственный интеграл* $\omega_{ik}(t,\tau)$ *и при* $n_0>1$ *единственный интеграл* $\omega_{0j}(t,\tau)$.

Аналогично, при любом $\tau\subset[a,b)$ *уравнение* (1) *имеет единственный интеграл* $v_{ik}(t,\tau)$ *и при* $n_0>1$ *единственный интеграл* $v_{0j}(t,\tau)$ *.

Теорема 2. *Всякий интеграл* $w(t)$ *уравнения* (1), *стремящийся к* $\lambda_i(\tau)$ *при* $t\to\tau-0$ $(\tau+0)$, *удовлетворяет одному из соотношений* (2) ((3)) *и, следовательно, совпадает с одним из интегралов* $\omega_{ik}(t,\tau)$ (v_{ik}).

Всякий интеграл, стремящийся к бесконечности при $t\to\tau-0$ $(\tau+0)$, *удовлетворяет одному из соотношений* (4) ((5)) *и поэтому совпадает с одним из интегралов* $\omega_{0j}(t,\tau)$ (v_{0j}).

Интегралов, не стремящихся к определенному пределу при $t\to\tau-0$ $(\tau+0)$, уравнение (1) не имеет.

Пусть t и ϑ — некоторые фиксированные числа, принадлежащие $[a,b]$, $\vartheta>t$. Обозначим через $L_{ik}(t,\vartheta)$ кривую $w=\omega_{ik}(t,\tau)$, $t\leqslant\tau\leqslant\vartheta$ $(\omega_{ik}(t,t)=\lambda_i(t))$ и через $C_{ik}(\vartheta,t)$ — кривую $w=v_{ik}(\vartheta,\tau)$, $t\leqslant\tau\leqslant\vartheta$ $(v_{ik}(\vartheta,\vartheta)=\lambda_i(\vartheta))$.

Аналогично, если $n_0>1$, определим кривые $L_{0j}(t,\vartheta)$ и $C_{0j}(\vartheta,t)$ при помощи интегралов $\omega_{0j}(t,\tau)$ и $v_{0j}(t,\tau)$.

Теорема 3. *Кривые* $L_{ik}(t,\vartheta)$, $L_{0j}(t,\vartheta)$, $C_{ik}(\vartheta,t)$, $C_{0j}(\vartheta,t)$ (*при* ϑ, *достаточно близком к* t) — *простые гладкие дуги Жордана. При различных* i *кривые* L_{ik} (C_{ik}) *не пересекаются, а при одинаковых* i *и различных* k *пересекаются только в точке* $\lambda_i(t)$ $(\lambda_i(\vartheta))$. *Кривые* L_{0j} (C_{0j}) *пересекаются только в бесконечности* **.

Будем обозначать через $G(t,\tau)$ область, полученную из плоскости проведением разрезов по кривым $L_{ik}(t,\vartheta)$ $L_{0j}(t,\vartheta)$, $(i=1,2,\ldots,m;$ $k=1,2,\ldots,n_i+1;$ $j=1,2,\ldots,n_0-1)$ и через $H((t,\vartheta)$ — область, полученную из плоскости проведением разрезов по кривым $C_{ik}(\vartheta,t)$ и $C_{0j}(\vartheta,t)$.

Теорема 4. *При* ϑ, *достаточно близком к* t, *интеграл уравнения* (1) $w=w(t,w_0,\vartheta)$ $(w(\vartheta,w_0,\vartheta)=w_0)$, *рассматриваемый, как функция начального значения* w_0, *отображает взаимно-однозначно и конформно область* $H_{w_0}(t,\vartheta)$ *на область* $G_w(t,\vartheta)$.

Для случая, когда функция $P(w,t)$ имеет вид:

$$w\frac{\mu(t)+w}{\mu(t)-w}, \qquad |\mu(t)|=1,$$

исследование отображения, осуществляемого интегралами уравнения (1), было проведено П. П. Куфаревым ([1]).

Физико-технический институт
Томского государственного университета

Поступило
27 I 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. П. Куфарев, Уч. зап. Томск. гос. ун-та, № 1 (1946).

* При $n_0=1$ интегралов, стремящихся к бесконечности при $t\to\tau\pm0$, не существует.

** Кривые $L_{ik}(C_{ik})$ и $L_{0j}(C_{0j})$ также не пересекаются.