НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
1949 г. УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ вып. 8

Кандидат физико-математических наук
Н. В. ПОПОВА

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛОВ УРАВНЕНИЯ $\frac{dw}{dt}=\frac{A}{w-\lambda(t)}$

В работе рассматривается уравнение вида:

$$\frac{dw}{dt}=\frac{A}{w-\lambda(t)}, \tag{1}$$

правая часть которого представляет собой простейшую функцию, рациональную относительно комплексного переменного w и имеющую единственный подвижный полюс первого порядка в точке $w=\lambda(t)$. Предполагается, что $A>0$ и что $\lambda(t)$ есть действительная функция действительного переменного t, которую мы будем считать дифференцируемой. Ставится целью выбрать функцию $\lambda(t)$ так, чтобы среди интегралов этого уравнения были интегралы

$$w=w(t,\ w_0,\ \tau) \qquad [w(\tau,\ w_0,\ \tau)=w_0],$$

которые при фиксированных t и τ отображают полуплоскость

$$Hw_0:\ Jm\,w_0>0 \tag{2}$$

на область, граница которой состоит из отрезков прямых.

Аналогичная задача решена П. П. Куфаревым[2] для так называемого уравнения Лёвнера:

$$\frac{dw}{dt}=w\frac{w+\mu(t)}{w-\mu(t)},$$

где

$$|\mu(t)|=1.$$

Правая часть этого уравнения является также рациональной функцией относительно w, имеющей полюсы первого порядка в точке $\mu(t)$ и в бесконечности. В указанной работе рассматривается уравнение в частных производных:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+w\frac{\mu+w}{\mu-w}\frac{\partial\Phi}{\partial w}=0,$$

для которого приведенное выше уравнение Лёвнера является уравнением характеристик, так что между интегралами этих уравнений легко устанавливается простая связь.

Методами, аналогичными методам, применяемым П. П. Куфаревым при исследовании интегралов уравнения Лёвнера, в данной работе доказывается, что указанный выше выбор функции $\lambda(t)$ может быть произведен. Далее исследуется изменение области, на которую отображается полуплоскость Hw_0, при изменении начального значения τ. Наконец, получаются некоторые соотношения для функций, однолистных в полуплоскости.

§ 1. Вместо уравнения (1) будем рассматривать уравнение в частных производных:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{A}{w-\lambda(t)} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial w} = 0, \qquad (2)$$

для которого (1) является уравнением характеристик.

Докажем теорему об интегралах уравнения некоторого общего вида, для которого (2) является частным случаем. С этой целью рассмотрим уравнение:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + P(w, t)\frac{\partial\Phi}{\partial w} = 0, \qquad (3)$$

где функция $P(w, t)$ определена для любого действительного значения t и комплексного переменного w, принадлежащего полуплоскости Hw. Предположим, что функция $P(w, t)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $P(w, t)$ голоморфна по w в полуплоскости Hw.
2. $P(w, t)$ непрерывна всюду по t.
3. $P(w, t)$ равномерно (по t) ограничена во всякой замкнутой области, принадлежащей Hw.
4. $Jm\, P(w, t) < 0$ для любого действительного t и любого w, принадлежащего полуплоскости Hw.

Мы будем рассматривать интеграл этого уравнения

$$z = \Phi(w, t),$$

который при $t=t_0$ обращается в заданную функцию $\Psi(w)$. Относительно этой начальной функции $\Psi(w)$ будем предполагать, что она взаимно однозначно и конформно отображает полуплоскость Hw на некоторую односвязную однолистную область, которую мы будем обозначать $G_z(t_0)$.

Следующая теорема устанавливает некоторые свойства функции $\Phi(w, t)$.

Теорема 1. Для всякого t, большего t_0[1]), функция $\Phi(w, t)$ отображает взаимно однозначно и конформно полуплоскость Hw на однолистную односвязную область $G_z(t)$. Причем, если $t_1 < t_2$ $(t_1 > t_0,\ t_2 > t_0)$, то $G_z(t_1) \supset G_z(t_2)$.

Аналогичная теорема доказана П. П. Куфаревым[1] для случая, когда функция $P(w, t)$ голоморфна относительно w в круге $|w|<1$, непрерывна по t при $t_0 \leqslant t \leqslant T$, равномерно (относительно t) ограничена во всяком круге $|w| < r$ $(r < 1)$ и

$$\operatorname{Re}\frac{P(w, t)}{w} > 0.$$

При этих условиях доказано[2]), что функция $\Phi(w, t)$ отображает взаимно однозначно и конформно круг Qw: $|w|<1$ на семейство вложенных друг в друга однолистных областей.

Доказательство нашей теоремы может быть проведено тем же путем, что и доказательство вышеуказанной теоремы. Поэтому мы приведем его лишь в общих чертах.

Можно свести рассмотрение отображения, осуществляемого функцией $\Phi(w, t)$, к рассмотрению отображения, осуществляемого функцией

$$\omega = \omega(\tau, w, t),$$

которая является интегралом уравнения:

$$\frac{d\omega}{d\tau} = P(\omega, \tau) \qquad (4)$$

при начальном условии

$$\omega(t, w, t) = w.$$

Условие 3, наложенное на функцию $P(\omega, \tau)$, обеспечивает существование и единственность решения уравнения (4). Это решение может быть продолжено до любого $\tau (\tau < t)$. Действительно, из уравнения (4) получаем:

$$\frac{dJm\,\omega}{d\tau} = Jm P(\omega, \tau)$$

и, следоватально,

$$\frac{dJm\,\omega}{d\tau} < 0,$$

---

1) Для $t < t_0$ имеет место аналогичная теорема.

2) См. [1], стр. 20.

так как $$JmP(\omega,\ \tau) < 0.$$

Это значит, что с уменьшением τ увеличивается $Jm\omega$. Но, при $\tau = t$

$$Jm\omega > 0$$

и значит точка ω лежит в верхней полуплоскости также и при $\tau < t$, что обеспечивает возможность продолжения решения.

Далее доказательство проводится совершенно так же, как в упомянутой выше теореме.

Доказанная теорема будет справедлива для интегралов уравнения (2), так как для функции

$$P(w,\ t) = \frac{A}{w - \lambda(t)}$$

выполняются все сформулированные выше условия. Если считать, что $A < 0$, то интегралы уравнения (2) будут отображать нижнюю полуплоскость на область указанного вида.

§ 2. Будем искать условия, при которых уравнение (2) имеет интегралы, отображающие полуплоскость Hw на область, ограниченную прямыми линиями.

Для этого поступим так же, как это сделано при нахождении соответствующих условий для уравнения Лёвнера (1). В уравнении (2) сделаем замену:

$$\Psi(w,\ t) = \ln \Phi'_W(w,\ t),$$

после чего оно примет вид:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{A}{w - \lambda(t)} \cdot \frac{\partial\Psi}{\partial w} = \frac{A}{[w - \lambda(t)]^2}. \tag{5}$$

Будем искать решение этого уравнения в виде:

$$\Psi(w,\ t) = \sum_{p=0}^{n} k_p \ln\,[a_p(t) - w] + c(t). \tag{6}$$

Здесь k_p — действительные постоянные, $a_p(t)$ $(p = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ n)$ и $c(t)$ — действительные функции. При этом мы считаем, что

$$k_p \geqslant -1 \quad (p = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{7}$$

Подставив значение $\Psi(w,\ t)$ в уравнение (5), мы получим

$$\sum_{p=0}^{n} \frac{k_p}{a_p(t) - w} \cdot \frac{da_p}{dt} - \frac{A}{w - \lambda(t)} \cdot \sum_{p=0}^{n} \frac{k_p}{a_p(t) - w} + \frac{dc}{dt} = \frac{A}{[w - \lambda(t)]^2} \tag{8}$$

Отсюда видно, что функция, стоящая в левой части этого равенства, должна иметь полюс второго порядка в точке $w = \lambda(t)$, а это может быть только тогда, когда одна из функций $a_p(t)$ $(p = 1,\ 2, \ldots, n)$ совпадает с функцией $\lambda(t)$. Будем считать, что

$$a_0(t) \equiv \lambda(t) \tag{9}$$

Устремляя в (8) w к бесконечности, получим:

$$\frac{dc}{dt} = 0,$$

т. е. c не зависит от t. Поэтому можем положить

$$c = \ln c_0. \tag{10}$$

где c_0 — постоянная.

Умножив уравнение (8) на $w - \lambda(t)$ и приравняв вычеты обеих частей полученного равенства относительно точки $w = \lambda(t)$, получим, что $k_0 = 1$. Приравняв вычеты обеих частей равенства (8) относительно точки $w = \lambda(t)$, будем иметь:

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\sum_{p=1}^{n} \frac{k_p}{a_p(t) - \lambda(t)}.$$

Это соотношение может быть получено другим путем. Устремляя в (8) w к нулю, мы получим:

$$\sum_{p=0}^{n} \frac{k_p}{a_p} \frac{da_p}{dt} + \frac{A}{\lambda} \sum_{p=0}^{n} \frac{k_p}{a_p} = \frac{1}{\lambda^2},$$

откуда легко выводится требуемое соотношение.

Аналогично получим, находя вычеты относительно точек $w = a_p(t)$ $(p = 1,\ 2, \ldots, n)$,

$$\frac{da_p}{dt} = \frac{A}{a_p - \lambda(t)}.$$

БИБЛИОТЕКА ... университета
30167

Таким образом, чтобы уравнение (5) имело интеграл вида (6), необходимо, чтобы функции $\lambda(t)$ и $a_p(t)$ ($p=1, 2, \ldots n$) удовлетворяли системе уравнений:

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\sum_{p=1}^{n} \frac{k_p}{a_p-\lambda} \tag{11}$$

$$\frac{da_p}{dt} = \frac{A}{a_p-\lambda}, \quad p=1, 2, \ldots, n$$

Эти условия являются также и достаточными для существования интегралов указанного типа.

§ 3. Рассмотрим вопрос о существовании решений системы уравнений (11), удовлетворяющих некоторым начальным условиям:

$$\text{при } t=t_0 \quad \lambda(t)=\lambda_0, \; a_p(t)=a_p^{(0)} \quad (p=1, 2, \ldots, n), \tag{12}$$

где λ_0 и $a_p^{(0)}$—заданные действительные числа. При этом, как было сказано выше, нас будут итересовать только действительные решения.

Если начальные условия таковы, что

$$a_p^{(0)} \neq \lambda_0 \; (p=1, 2, \ldots, n), \tag{13}$$

то выполняются условия теоремы существования и единственности решения системы дифференциальных уравнений и, следовательно, система уравнений имеет единственное действительное решение, определенное в некоторой окрестности точки $t=t_0$.

Предположим теперь, что условия (13) не выполняются. Прежде всего, заметим, что достаточно рассмотреть только такие начальные условия:

$$a_1^{(0)}, \; a_2^{(0)}, \; \ldots \; a_n^{(0)}, \; \lambda_0,$$

для которых

$$a_1^{(0)} = a_n^{(0)} = \lambda_0, \tag{14}$$

но

$$a_p^{(0)} \neq \lambda_0 \quad (p=2, 3, \ldots, n-1),$$

т. к. рассмотрение остальных случаев легко может быть сведено к рассмотрению этого случая [1]).

Относительно существования действительного решения системы уравнений (11) может быть доказана следующая теорема.

---

[1]) См. [2], стр. 63.

Теорема 2. Система уравнений (11) имеет действительное решение $\lambda(t)$, $a_p(t)$ ($p=1, 2, \ldots, n$), удовлетворяющее начальным условиям (12), для которых имеют место соотношения (14).

В работе П. П. Куфарева[2] доказано существование единственного решения $a_p(t)$, $\mu(t)$ ($|a_p|=1$, $|\mu(t)|=1$) [1]) системы уравнений:

$$\frac{d\ln a_p}{dt} = \frac{\mu+a_p}{\mu-a_p},$$

$$\frac{d\ln\mu}{dt} = -\sum_{p=1}^{n} k_p \frac{\mu+a_p}{\mu-a_p} \quad (p=1, 2, \ldots n)$$

или

$$\frac{d\varphi_p}{dt} = \operatorname{ctg}\frac{\varphi_p-\lambda}{2},$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\sum_{p=1}^{n} k_p \frac{d\varphi_p}{dt}, \tag{15}$$

где φ_p и λ являются, соответственно, аргументами функций a_p и μ. Некоторыми преобразованиями система первых n из этих уравнений приводится там к следующему виду:

$$x\frac{du_1}{dx} = -2u_1 + xA_1 + P_1(u_1, u_n)$$

$$x\frac{du_n}{dx} = -(2+k_1+k_n)u_n + xA_n + P_n(u_1, u_n),$$

$$\frac{du_p}{dt} = xA_p + B_p \quad (p=2, 3 \ldots, n-1),$$

где $A_к$ и $B_к$—функции $u_1, u_2, \ldots, u_n$, голоморфные в окрестности начальных значений и $P_к(u_1, u_n)$—полиномы от u_1 и $u_к$, содержащие члены степени выше первой относительно u_1 и $u_к$.

Если для системы (11) сделать такие же преобразования, как и для системы (15), то получим:

$$x\frac{du_1}{dx} = -2u_1 + S_1(x, u_1, \ldots, u_n)$$

$$x\frac{du_n}{dx} = -(2+k_1+k_n)u_n + S_n(x, u_1, \ldots, u_n)$$

$$\frac{du_p}{dx} = S_p(x, u_1, u_2, \ldots, u_n), \; p=2, 3, \ldots, n-1, \tag{16}$$

---

[1]) Здесь $a_p(t)$ и $\mu(t)$ не являются действительными функциями.

где $S_1, S_2, \ldots, S_n$ — полиномы относительно $x, u_1, \ldots, u_n$ степени не ниже второй. Методом последовательных приближений легко может быть доказано, что система (16) имеет действительное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$\text{при } x=0 \quad u_1=0, \quad u_n=0, \quad u_p=\frac{1}{a_p^{(0)}-\lambda_0}, \quad p=2, 3, \ldots, n-1.$$

При этом надо иметь в виду, что $a_p^{(0)} \neq \lambda_0$ по условию теоремы и что, согласно (7), $2+k_1+k_2>0$.

Что касается функции $\lambda(t)$, то она, после того, как найдены функции $a_p(t)$ $(p=1, 2, \ldots n)$, непосредственно получается интегрированием первого уравнения системы (11).

Теорема таким образом доказана

§ 4. Выше установлено, что система уравнений (11), при любых действительных начальных условиях (12) имеет действительное решение

$$a_p(t), \; \lambda(t) \; (p=1, 2, \ldots, n).$$

Это значит, что уравнение (5) имеет интеграл вида

$$\Psi(w, t)=\ln[\lambda(t)-w]+\sum_{p=1}^{n} k_p \ln[a_p(t)-w]+\ln c_0,$$

где функции $a_p(t)$ и $\lambda(t)$ — действительное решение системы (11). При этом мы учитываем полученные выше соотношения (9) и (10).

Отсюда непосредственно следует, что функция

$$\Phi(w, t)=c_0 \int_0^w (\lambda-w) \prod_{p=1}^{n}(a_p-w)^{K_p} \, dw \tag{17}$$

будет являться интегралом уравнения (2). Начальная функция имеет вид:

$$\Phi(w, t_0)=c_0 \int_0^w (\lambda_0-w) \prod_{p=1}^{n}(a_p^{(0)}-w)^{K_p} dw. \tag{18}$$

Из вида функций (17) и (18) следует, что они отображают полуплоскость H_w на область $G_z(t)$, граница которой состоит из отрезков прямых линий. Вершинами граничной ломаной являются точки $\Phi(\lambda, t)$, $\Phi(a_p, t)$ $(p=1, 2, \ldots, n)$. Угол при вершине $\Phi(a_p, t)$ равен $(1+k_p)\pi$, а угол при вершине $\Phi(\lambda, t)$ равен 2π,

так как ранее было доказано, что $k_0=1$. Это значит, что точка $\Phi(\lambda, t)$ является концом разреза.

Рассмотрим изменение области $G_z(t)$ с изменением параметра t.

Теорема 3. Функции $\Phi(a_p, t)$ $(p=1, 2, \ldots, n)$, от параметра t не зависят.

Доказательство. Представим $\Phi(a_p, t)$ в виде:

$$\Phi(a_p, t)=\int_0^{a_p} \Phi'_w(w, t)\, dw+\Phi(0, t) \tag{19}$$

Сначала предположим, что $k_p>0$. Тогда получим:

$$\frac{\partial \Phi(a_p, t)}{\partial t}=\int_0^{a_p} \frac{\partial \Phi'_w}{\partial t} dw+\frac{da_p}{dt} \Phi'_w(a_p, t)+\Phi'_t(0, t) \tag{20}$$

Но

$$\Phi'_w(w, t)=c_0(\lambda-w) \prod_{p=1}^{n}(a_p-w)^{K_p},$$

что следует из (17). Отсюда видно, что

$$\Phi'_w(a_p, t)=0,$$

так как по предположению k_p больше нуля. Далее, дифференцируя по w обе части уравнения (2), получим:

$$\frac{\partial \Phi'_w}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{A}{w-\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial w}\right) \tag{21}$$

Подставляя найденные значения для

$$\frac{\partial \Phi'_w}{\partial t} \text{ и } \Phi'_w(a_p, t)$$

в правую часть равенства (20), будем иметь:

$$\frac{\partial \Phi(a_p, t)}{\partial t}=-\int_0^{a_p} \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{A}{w-\lambda} \Phi'_w\right) dw+\Phi' t(0, t)=$$

$$=\Phi'_t(0, t)-\frac{A}{\lambda} \Phi'_w(0, t),$$

что равняется нулю, так как из (2) при $w=0$ получаем:

$$\Phi'_t(0,t)\lambda=\Phi'_w(0,t)A. \qquad (22)$$

Следовательно доказано, что в этом случае

$$\frac{\partial\Phi(a_p,t)}{\partial t}=0.$$

Теперь предположим, что $k_p<0$. Введем в рассмотрение функции $f_p(w,t)$ и $\Psi_p(w,t)$, положив:

$$f_p(w,t)=(a_p-w)^{k_p}[\Psi_p(w,t)-\Psi_p(a_p,t)],$$

$$\Psi_p(w,t)=c_0(\lambda-w)\sum_{\substack{m=1\\ m\neq p}}^{n}(a_m-w)^{k_p}$$

Тогда

$$\Phi'_w(w,t)=f_p(w,t)+(a_p-w)^{k_p}\Psi_p(a_p,t)$$

Подставляя это значение $\Phi'_w(w,t)$ в (19), получим:

$$\Phi(a,t)=\frac{a_p^{k_p+1}}{k_p+1}\Psi_p(a_p,t)+\int_0^{a_p}f_p(w,t)dw+\Phi(0,t).$$

Отсюда, после некоторых преобразований, будем иметь также

$$\frac{\partial\Phi(a_p,t)}{\partial t}=0,$$

если примем во внимание соотношения (21) и (22).

Мы доказали, следовательно, что при изменении t вершины $\Phi(a_p,t)$, $p=1,2,\dots,n$, граничной ломаной остаются неподвижными. Значит, лишь одна вершина $\Phi(\lambda,t)$, являющаяся концом прямолинейного разреза, может двигаться при изменении t.

Из теоремы 1 следует, что область $G_z(t)$ однолистна, односвязна и, если

$$t_1<t_2 \quad (t_1<t_0, t_2<t_0),$$

то

$$G_z(t_1)\supset G_z(t_2),$$

а это значит, что при возрастании t ($t\geqslant t_0$)[1] вершина $\Phi(\lambda,t)$ двигается так, что разрез, концом которого является эта вершина, будет удлиняться.

Мы выяснили, таким образом, что вид областей $G_z(t)$, на которые отображает интеграл уравнения (2) полуплоскость H_w, такой же как вид областей, на которые интеграл уравнения Лёвнера (в частных производных) отображает круг $|w|<1$.

Функции $\lambda(t)$, $a_p(t)$ определены, вообще говоря, только в некоторой окрестности точки $t=t_0$. Значит, указанное выше отображение при помощи функции

$$z=\Phi(w,t)$$

мы можем рассматривать лишь в некотором интервале (t_0,t_1). В частном случае, когда всюду

$$a_p(t)\neq\lambda(t),\ p=1,2,\dots,n,$$

эти функции могут быть продолжены на весь интервал $(t_0,+\infty)$. Это непосредственно следует из вида системы уравнений (11).

Легко также показать, что если $a_p^{(0)}$ ($p=1,2,\dots,n$), не совпадает с λ_0, то точка $\Phi(\lambda_0,t)$, являясь концом разреза, при увеличении t двигается по прямой, направление которой совпадает с направлением звена ломаной, соединяющего вершины $\Phi(a_n^{(0)},t_0)$ и $\Phi(\lambda_0,t_0)$. Этого, вообще говоря, не будет, если не все $a_p^{(0)}$ отличны от λ_0.

Различные случаи расположения конечного разреза здесь могут представиться такие же, как и в работе П. П. Куфарева[2]. Мы их не рассматриваем, так как это исследование делается совершенно так же, как в указанной работе.

§ 5. Мы доказали, что уравнение (2) при надлежащем выборе функции $\lambda(t)$ имеет интегралы, которые отображают взаимно однозначно и конформно полуплоскость H_w на область $G_z(t)$, ограниченную отрезками прямых. В частности, если в качестве начальной функции возьмем функцию $z=w$, то область $G_z(t)$ при $t>t_0$ принадлежит полуплоскости H_z.

Вернемся теперь к уравнению (1), которое, изменяя обозначения, запишем в виде:

$$\frac{d\omega}{d\tau}=\frac{A}{\omega-\lambda(\tau)} \qquad (23)$$

Между интегралом этого уравнения

$$\omega=\omega(\tau,w,t), \qquad (24)$$

1) Аналогично может быть рассмотрен случай, когда $t<t_0$.

который при $\tau = t$ равен w, и интегралом уравнения (2)

$$z = \Phi(w, t),$$

который при $t = t_0$ обращается также в w, существует простое соотношение:

$$\Phi(w, t) = \omega(t_0, w, t).$$

Оно следует из того, что уравнение (23) является уравнением характеристик для уравнения в частных производных (2).

Отсюда ясно, что если интеграл (24) рассматривать как функцию начального значения w, то он отображает взаимно однозначно и конформно полуплоскость Hw на область $G_z(t)$, принадлежащую полуплоскости. Из доказанного выше непосредственно следует, что при надлежащем выборе функции $\lambda(t)$ существуют такие интегралы уравнения (23), что соответствующая область $G_z(t)$ будет ограничена отрезками прямых. Изменение этой области с изменением t было рассмотрено выше.

Докажем еще одно свойство интегралов уравнения (23).

Пусть $z = f(w)$ есть произвольная функция, отображающая взаимно однозначно и конформно Hw на однолистную односвязную область G, принадлежащую верхней полуплоскости. Следующая теорема устанавливает зависимость между интегралами уравнения (23) и функцией $f(w)$.

Теорема 4. Функцию $f(w)$ можно аппроксимировать[1] интегралами уравнения (23).

Доказательство. Из предыдущего ясно, что теорема будет доказана, если мы установим, что функцию $f(w)$ можно аппроксимировать интегралами $\Phi(w, t)$ уравнения (2). Далее, очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда область G, на которую функцией $z = f(w)$ отображается Hw, ограничена ломаной линией. Вершины этой ломаной обозначим через

$$A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$$

По доказанному ранее уравнение (2) имеет интеграл $\Phi(w, t)$ вида (17), отображающий Hw на область $G_z(t)$. Возьмем действительные числа

$$\lambda_0, a_p^{(0)}, k_p \quad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

такими, чтобы функция (18) $\Phi(w, t_0)$ отображала Hw на область $G_z(t_0)$, которая представляет собой полуплоскость H_z с разрезом по ломаной $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, B$ где B — произвольная точка отрезка $A_{n-1}A_n$. Так как при этом $a_p^{(0)} \neq \lambda_0$, то $G_z(t)$ получается из

[1]) Аппроксимировать в том смысле что $\lim\limits_{t \to T} \omega(\tau, w, t) = f(w)$. Здесь τ считается фиксированным.

$G_z(t_0)$ удлинением разреза, который пойдет по прямой BA_n. Легко доказать, что при возрастании t конец разреза сколь угодно близко подходит к точке A_n. Следовательно, мы имеем семейство областей $G_z(t)$, которые сходятся к заданной области G, как к своему ядру, а тогда по теореме Каратеодори[1]) функции $\Phi(w, t)$, отображающие Hw на $G_z(t)$, стремятся к функции $f(w)$, отображающей Hw на G.

§ 6. На основании теоремы 4 можно получить, исходя из уравнения (23), некоторые неравенства, которым удовлетворяет функция $w = f(z)$, отображающая взаимно однозначно и конформно верхнюю полуплоскость H_z на однолистную односвязную область.

Получим некоторые неравенства для функции, являющейся интегралом уравнения (1), в котором мы для простоты положим $A = 1$. Обозначим эту функцию через $\varphi(z, t)$ и будем считать, что

$$\varphi(z, t_0) = z \tag{25}$$

Для функции $\varphi(z, t)$ будем иметь

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\varphi - \lambda},$$

откуда легко получим следующие соотношения:

$$\frac{d \arg \varphi_z'}{dt} = -\frac{2 Jm\varphi \cdot Re(\varphi - \lambda)}{|\varphi - \lambda|^4} \tag{26}$$

$$\frac{d \ln |\varphi_z'|}{dt} = \frac{[Re(\varphi - \lambda)]^2 - (Jm\varphi)^2}{|\varphi - \lambda|^4}. \tag{27}$$

$$\frac{d Jm\varphi}{dt} = -\frac{Jm\varphi}{|\varphi - \lambda|^2}. \tag{28}$$

Из (26) и (28) следует, что

$$\frac{d \arg \varphi_z'}{d Jm\varphi} = \frac{2 Jm\varphi \cdot Re(\varphi - \lambda)}{Jm\varphi \cdot |\varphi - \lambda|^2}$$

или

$$\frac{|d \arg \varphi_z'|}{-d Jm\varphi} \leq \frac{2 Jm\varphi \cdot |Re(\varphi - \lambda)|}{Jm\varphi \cdot |\varphi - \lambda|^2}$$

При этом мы учитываем, что $Jm\varphi > 0$ и $d Jm\varphi < 0$, так как

[1]) См. [3], стр. 91.

$Jm\varphi$ увеличивается с уменьшением t. В силу того, что

$$2Jm\varphi \cdot |Re(\varphi - \lambda)| \leqslant |\varphi - \lambda|^2,$$

можем написать:

$$|d\arg \varphi'_z| \leqslant -\frac{dJm\varphi}{Jm\varphi}$$

или

$$\left|\int_t^{t_0} d\arg \varphi'_z\right| \leqslant -\int_t^{t_0} \frac{dJm\varphi}{Jm\varphi}.$$

Отсюда, принимая во внимание (25), получим

$$|\arg \varphi'_z| \leqslant \ln \frac{Jm\varphi}{Jmz} \qquad (29)$$

Аналогично из (27) и (28) можем получить:

$$|\varphi'_z| \leqslant \frac{Jm\varphi}{Jmz}. \qquad (30)$$

На основании теоремы 4 заключаем, что неравенства (29) и (30) будут справедливы и для функции $w = f(z)$.

Заметим еще, что для функции $w = z$ эти соотношения обратятся в равенства.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. П. Куфарев. Ученые записки Томского государственного университета, вып. 5. 1947.

2. П. П. Куфарев. Ученые записки Томского государственного университета, вып. 8, 1948.

3. Каратеодори. Конформное отображение, 1934.