УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

1950 № 14

ОБ ОТОБРАЖЕНИЯХ, ОСУЩЕСТВЛЯЕМЫХ ИНТЕГРАЛАМИ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н. В. Попова

В работе исследуются некоторые свойства интегралов уравнения:

$$\frac{dw}{dt} = P(w, t),$$

правая часть которого является функцией комплексного переменного w и действительного переменного t, рациональной относительно w при всяком t, принадлежащем некоторому замкнутому интервалу и удовлетворяющей еще некоторым дополнительным условиям.

Для простейшего случая, когда уравнение (1) есть уравнение Лёвнера, т. е. функция $P(w, t)$ имеет вид:

$$w(t)\cdot\frac{\mu(t)+w}{\mu(t)-w}, \quad |\mu(t)| = 1,$$

такое исследование было выполнено П. П. Куфаревым [1]. Им доказано, что, если

$$\mu(t) = e^{i\alpha(t)}$$

и $\alpha(t)$ имеет на некотором интервале ограниченную производную, то интеграл уравнения $w = w(t, w_0, \tau)\,[w(\tau, w_0, \tau) = w_0]$, рассматриваемый как функция начального значения w_0, отображает взаимно однозначно и конформно круг $|w_0| < 1$ на область, полученную из круга $|w| < 1$ проведением разреза по простой гладкой линии Жордана.

Этими же методами в работе доказывается, что интеграл уравнения (1) $w = w(t, w_0, \tau)\,[w(\tau, w_0, \tau) = w_0]$, рассматриваемый, как функция w_0, отображает взаимно однозначно и конформно область, полученную из плоскости проведением разрезов по конечному числу простых гладких кривых Жордана, на область такого же вида.

§ 1. Рассмотрим уравнение (1), где $P(w, t)$ есть функция действительного переменного t и комплексного переменного w, рациональная относительно w при всяком t, принадлежащем некоторому замкнутому интервалу $[a, b]$.

Предположим, что $P(w, t)$ при любом t, принадлежащем $[a, b]$, удовлетворяет условиям (I), (II) и (III), которые мы формулируем ниже.

(I). Число $m+1$ полюсов функции $P(w, t)$ и порядок $n_i\,(i = 0, 1\,\ldots, m)$ каждого полюса не изменяются с изменением t.

(II). Если $w=\lambda_i(t)$ $(i=1,2,\ldots,m)$ есть полюсы функции $P(w,t)$, расположенные в конечной плоскости, то предполагаем, что функции $\lambda_i(t)$ дифференцируемы и производные от этих функций непрерывны на интервале $[a,b]$.

Отсюда, в частности, следует, что функции $\lambda_i(t)$ ограничены на $[a,b]$ (как непрерывные на замкнутом интервале) и что точка $w=\infty$ может быть только неподвижным полюсом функции $P(w,t)$.

Пусть в точке $\lambda_i(t)$ $(i=1,2,\ldots,m)$ будет полюс порядка n_i $(n_i\geq 1)$ и в бесконечности — полюс порядка n_0 $(n_0>0)$. Тогда уравнение (1) может быть записано в следующем виде:

$$\frac{dw}{dt}=F_0(w,t)+\sum_{i=1}^{m}\frac{F_i(w,t)}{(w-\lambda_i(t))^{n_i}}, \tag{2}$$

где

$$F_0(w,t)=A_{00}(t)+A_{01}(t)\,w+\ldots+A_{0n_0}(t)\,w^{n_0}$$

и

$$F_i(w,t)=A_{i0}(t)+A_{i1}(t)(w-\lambda_i(t))+\ldots+A_{in_i}(t)(w-\lambda_i(t))^{n_i}.$$

(III). Функции $A_{ik}(t)$ $(i=0,1,2,\ldots,m;\ k=0,1,2,\ldots,n_i)$ дифференцируемы и производные $A'_{ik}(t)$ непрерывны на $[a,b]$.

Отсюда заключаем, что функции $A_{ik}(t)$ ограничены на интервале $[a,b]$.

Наша задача состоит в изучении свойств интегралов этого дифференциального уравнения.

Пусть $w_0\neq\lambda_i(\tau)$, $\tau\subset[a,b]$ $(i=1,2,\ldots,m)$ и $w_0\neq\infty$. Тогда правая часть уравнения (2) голоморфна по w и непрерывна (по совокупности аргументов) при $t=\tau$ и $w=w_0$. Значит, существует единственный интеграл уравнения $w(t,w_0,\tau)$ который стремится к w_0 при $t\to\tau$.

Особый интерес для нас представляют интегралы, которые стремятся к $\lambda_i(\tau)$ *) при $t\to\tau$ и интегралы, которые стремятся к бесконечности при $t\to\tau$.

Прежде, чем перейти к рассмотрению таких интегралов, введем некоторые вспомогательные обозначения.

Различные значения выражения

$$\frac{1}{\sqrt[n_i+1]{-(n_i+1)A_{i0}(t)}}$$

будем обозначать через $\alpha_{i1}(t),\alpha_{i2}(t),\ldots,\alpha_{in_i+1}(t)$, а значения

$$\frac{1}{\sqrt[n_i+1]{-(n_i+1)A_{i0}(t)}}$$

— через $\beta_{i1}(t),\beta_{i2}(t),\ldots,\beta_{in_i+1}(t)$.

---

*) i считаем в дальнейшем фиксированным

Если $n_0>1$, то обозначим через $\alpha_{01}(t),\alpha_{02}(t),\ldots,\alpha_{0n_0-1}(t)$ различные значения выражения

$$\frac{1}{\sqrt[n_0-1]{(n_0-1)A_{0n_0}(t)}}$$

и аналогично через $\beta_{01}(t),\beta_{02}(t),\ldots,\beta_{0n_0-1}(t)$ — различные значения

$$\frac{1}{\sqrt[n_0-1]{-(n_0-1)A_{0n_0}(t)}}.$$

Из условия (I) следует, что при всяком t из $[a,b]$ функции $A_{i0}(t)$ и $A_{0n_0}(t)$ отличны от нуля и следовательно, функции $\alpha_{ik}(t),\beta_{ik}(t)$ $(k=1,2,\ldots,n_i+1)$, $\alpha_{0j}(t)$ и $\beta_{0j}(t)$ $(j=1,2,\ldots,n_0-1)$ имеют смысл.

Далее, обозначим через $\omega_{ik}(t,\tau)$ интеграл рассматриваемого уравнения, который стремится к $\lambda_i(\tau)$ при $t\to\tau-0$ и который удовлетворяет соотношению:

$$\lim_{t\to\tau-0}\frac{\sqrt[n_i+1]{\tau-t}}{\omega_{ik}(t,\tau)-\lambda_i(t)}=\alpha_{ik}(\tau). \tag{3}$$

Через $v_{ik}(t,\tau)$ обозначим интеграл этого уравнения, стремящийся к $\lambda_i(\tau)$ при $t\to\tau+0$ и удовлетворяющий соотношению:

$$\lim_{t\to\tau+0}\frac{\sqrt[n_i+1]{t-\tau}}{v_{ik}(t,\tau)-\lambda_i(t)}=\beta_{ik}(\tau). \tag{4}$$

Если $n_0>1$, то аналогичные обозначения можно ввести для интегралов, которые стремятся к бесконечности при $t\to\tau$.

Будем обозначать через $\omega_{0j}(t,\tau)$ интеграл уравнения, который стремится к бесконечности при $t\to\tau-0$ и который удовлетворяет соотношению:

$$\lim_{t\to\tau-0}\omega_{0j}(t,\tau)\cdot\sqrt[n_0-1]{\tau-t}=\alpha_{0j}(\tau). \tag{5}$$

и через $v_{0j}(t,\tau)$ — интеграл уравнения, стремящийся к бесконечности при $t\to\tau+0$, если

$$\lim_{t\to\tau+0}(v_{0j}(t,\tau)\cdot\sqrt[n_0-1]{t-\tau})=\beta_{0j}(\tau). \tag{6}$$

Здесь $\alpha_{ki}(t)$, $\beta_{ik}(t)$, $\alpha_{0j}(t)$ и $\beta_{0j}(t)$ обозначают введенные выше функции, а под $\sqrt[n_0+1]{\tau-t}$, $\sqrt[n_0-1]{\tau-t}$ (при $t<\tau$) $\sqrt[n_i+1]{t-\tau}$, $\sqrt[n_0-1]{t-\tau}$ (при $t>\tau$), как и всюду в дальнейшем, понимаются их арифметические значения.

§ 2. Докажем, что интегралы $\omega_{ik}(t,\tau),\omega_{0j}(t,\tau),v_{ik}(t,\tau)$ и $v_{0j}(t,\tau)$ существуют.

Теорема I. Для любого τ из интервала (a, b) уравнение имеет n_i+1 интегралов $\omega_{ik}(t, \tau)$ и столько же интегралов $v_{ik}(t, \tau)$.

Доказательство. Уравнение может быть записано в виде:

$$\frac{dw}{dt}=\frac{A_{io}(t)+(w-\lambda_i(t))\,Q(w, t)}{(w-\lambda_i(t))^{n_i}}, \tag{7}$$

где $Q(w,t)$ есть функция, голоморфная по w в точке $w=\lambda_i(t)$. В этом уравнении сделаем замену переменных, введя функции x и y_{ik}, связанные с t и w соотношениями:

$$x=\sqrt[n_i+1]{\tau-t}, \tag{8}$$

$$y_{ik}=\frac{x}{w-\lambda_i(t)}-\alpha_{ik}(t). \tag{9}$$

$\alpha_{ik}(t)$ обозначает здесь одну из введенных в предыдущем параграфе функций:

$$\alpha_{i_1}(t),\ \alpha_{i_2}(t), \ldots,\ \alpha_{in_i+1}(t).$$

После простых преобразований уравнение (7) примет в новых переменных следующий вид:

$$\frac{x}{n_i+1}\,\frac{dy_{ik}}{dx}=-y_{ik}+g(x, y_{ik}), \tag{10}$$

где

$$g(x, y_{ik})=y_{ik}\cdot\varphi(x, y_{ik})+x\cdot\psi(x, y_{ik}).$$

Здесь введены обозначения:

$$\varphi(x, y_{ik})=A_{io}\cdot y_{ik}\left(\frac{1}{2}(n_i+1)(n_i+2)\,\alpha_{ik}+\ldots+y_{ik}^{n_i}\right)$$

и

$$\psi(x, y_{ik})=(\alpha_{ik}+y_{ik})^{n_i+1}Q(w, t)-x^{n_i-1}(\alpha_{ik}+y_{ik})^2\lambda_i'+\alpha_{ik}'\cdot x^{n_i},$$

где

$$w=\lambda_i(t)+\frac{x}{\alpha_{ik}(t)+y_{ik}} \tag{11}$$

и

$$t=\tau-x^{n_i+1}. \tag{12}$$

Докажем, что уравнение (10) имеет интеграл, стремящийся к нулю, когда $x\to 0$. Доказательство можно провести аналогично доказательству, приводимому в книге Пикара [2] для уравнения

$$x^m\frac{dy}{dx}=by-f(x, y)\ (b<0,\ m\text{ — целое положительное число}),$$

где функция

$$f(x, y)=x\varphi(x)+y\,\Phi(x, y)\ (\Phi(0.0)=0)$$

голоморфна в точке $x=0$, $y=0$ по обоим переменным.

Определим последовательность функций

$$y_{ik}^{(0)},\ y_{ik}^{(1)}, \ldots, y_{ik}^{(p)}, \ldots \tag{13}$$

следующим образом: $y_{ik}^{(0)}=0$ и $y_{ik}^{(p+1)}$ $(p=0,1,2,\ldots)$ есть решение уравнения

$$\frac{x}{n_i+1}\,\frac{dy_{ik}^{(p+1)}}{dx}=-y_{ik}^{(p+1)}+g(x, y_{ik}^{(p)}), \tag{14}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$y_{ik}^{(p+1)}(0)=0. \tag{15}$$

Из уравнения (14), учитывая начальное условие, находим:

$$y_{ik}^{(p+1)}=\frac{n_i+1}{x^{n_i+1}}\int_0^x x^{n_i}\cdot g(x, y_{ik}^{(p)})\,dx.$$

Легко доказать, что существуют положительные числа d и h, обладающие следующими свойствами:

а) Если $x<d$ и $|y|<h$, то $|g(x, y)|<h$

б) Если $x<d$, $|y|<h$ и $|z|<h$, то

$$|g(x, y)-g(x, z)|<\gamma\cdot|y-z|,$$

где γ — положительное число, меньшее единицы.

Выполнение первого свойства для достаточно малых d и h следует из вида функции $g(x, y)$. При этом учитываются свойства (II) и (III) функций A_{ik} и $\lambda_i(t)$ и то, что по определению функции $\alpha_{ik}(t)$ нигде в нуль не обращаются.

Докажем второе свойство. Имеем:

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial y}=\varphi(x, y)+y\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}+x\frac{\partial\psi}{\partial y}.$$

Из вида функций $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ следует, что $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ и $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ непрерывны по x и y в точке $x=0$, $y=0$. Если учесть, что $\varphi(0, 0)=0$, то мы получим:

$$g_y'(0, 0)=0.$$

Поэтому можно написать:

$$g(x, y)-g(x, z)=(y-z)\,\chi(x, y, z),$$

где

$$\chi(x, y, z)\to 0\ (\text{при } x\to 0, y\to 0, z\to 0). \tag{16}$$

Отсюда непосредственно вытекает существование d и h, для которых выполняется второе свойство *).

Пользуясь этими свойствами $g(x, y_{ik})$, легко доказать, что последовательность функций (13) сходится равномерно на интервале (o, d). Действительно, оценивая члены ряда

$$\left|y_{ik}^{(1)} - y_{ik}^{(0)}\right| + \left|y_{ik}^{(3)} - y_{ik}^{(1)}\right| + \ldots + \left|y_{ki}^{(p+1)} - y_{ik}^{(p)}\right| + \ldots,$$

получим

$$\left|y_{ik}^{(1)} - y_{ik}^{(0)}\right| < h,$$

$$\left|y_{ik}^{(2)} - y_{ik}^{(1)}\right| < \gamma h,$$

$$\left|y_{ik}^{(p+1)} - y_{ik}^{(p)}\right| < \gamma^p . h.$$

Так как $\gamma < 1$, то ряд равномерно сходится на (o, d). Этим доказана равномерная сходимость последовательности к некоторой функции $y_{ik}(x)$. Эта функция удовлетворяет уравнению (10) и начальному условию:

$$y_{ik}(0) = 0.$$

Из равенств (11) и (12) следует, что интегралу $y_{ik}(x)$ уравнения (10) соответствует интеграл $w_{ik}(x)$ уравнения (7), определенный на некотором интервале $[\tau - s, \tau]$. Из равенств (11) и (12) следует, что когда $t \to \tau - 0 (x \to +0)$,

$$w_{ik}(t) \to \lambda_i(\tau).$$

Кроме того, из этих равенств видно, что при $t \to \tau - 0$

$$\frac{\sqrt[n_i+1]{\tau - t}}{w_{ik}(t) - \lambda_i(t)} \to \alpha_{ik}(\tau),$$

т. е. интеграл $w_{ik}(t)$ удовлетворяет соотношению (3). Согласно определению этот интеграл есть интеграл $\omega_{ik}(t, \tau)$.

Таким образом, доказано существование интегралов $\omega_{ik}(t, \tau)$ для $k = 1, 2, \ldots, n_i + 1$. Число таких интегралов будет равно

$$m + \sum_{i=1}^{m} n_i.$$

Вторая часть теоремы доказывается аналогично. Нужно только в уравнении сделать замену переменных при помощи соотношений:

$$x^{n_i+1} = t - \tau,$$

$$v_{ik} = \frac{x}{w - \lambda_i(t)} - \beta_{ik}(t),$$

где $\beta_{ik}(t)$ — одна из функций: $\beta_{i_1}(t), \beta_{i_2}(t), \ldots, \beta_{in_i+1}(t)$.

*) Заметим, что d и h можно взять не зависящими от τ, $\tau \subset [a + \varepsilon, в - \varepsilon]$, где ε — некоторое положительное сколь угодно малое число.

Теорема II. Если $n_0 > 1$, то уравнение имеет для любого τ, принадлежащего интервалу (a, b), $n_0 - 1$ интегралов $\omega_{0j}(t, \tau)$ и столько же интегралов $v_{0j}(t, \tau)$. Если же $n_0 = 1$, то это уравнение не имеет интегралов, стремящихся к бесконечности при $t \to \tau$.

Доказательство. Запишем уравнение (2) в виде:

$$\frac{dw}{dt} = A_{0n_0}(t) w^{n_0} + w^{n_0-1} . R(w, t), \tag{17}$$

где $R(w, t)$ голоморфна по w на бесконечности.

Предположим, что $n_0 > 1$. В уравнении (17) сделаем замену переменных, введя функции x и y_{0j}, связанные с t и w соотношениями:

$$x^{n_0-1} = \tau - t,$$

$$y_{0j} = \sqrt[n_0-1]{\tau - t} . w - \alpha_{0j}(t), \tag{18}$$

где α_{0j} есть одна из функций: $\alpha_{01}(t), \alpha_{02}(t), \ldots, \alpha_{0n_0-1}(t)$. В новых переменных это уравнение примет вид, аналогичный виду уравнения (10). При доказательстве предыдущей теоремы было показано, что уравнение такого вида имеет интеграл y_{0j}, который обращается в нуль при $x = 0$. Из равенства (18) тогда следует, что уравнение имеет интеграл $w_{0j}(t)$, который стремится к бесконечности, когда $t \to \tau - 0$, и для которого имеет место соотношение

$$\lim_{t \to \tau - 0} \left(w_{0j} \cdot \sqrt[n_0-1]{\tau - t}\right) = \alpha_{0j}(\tau).$$

Согласно определению, введенному в предыдущем параграфе, этот интеграл есть интеграл $\omega_{0j}(t, \tau)$. Как и в предыдущей теореме находим число s_1 (не зависящее от τ) такое, что этот интеграл определен на $[\tau - s_1, \tau]$, $\tau \subset [a + \varepsilon, b - \varepsilon]$. Таким образом, доказано существование интегралов $\omega_{0j}(t, \tau)$ для $j = 1, 2, \ldots, n_0 - 1$.

Совершенно аналогично можно доказать существование интегралов $v_{0j}(t, \tau)$ $(j = 1, 2, \ldots, n_0 - 1)$. При этом вместо функции $\alpha_{0j}(t)$ надо воспользоваться функцией $\beta_{0j}(t)$.

Пусть теперь $n_0 = 1$, т. е. уравнение (17) имеет вид

$$\frac{dw}{dt} = A_{0n_0}(t) . w + R(w, t).$$

Введя новое переменное $u = \frac{1}{w}$, получим:

$$\frac{du}{dt} = -A_{0n_0}(t)\, u - u^2 . R\left(\frac{1}{u}, t\right).$$

Правая часть этого уравнения голоморфна по u и непрерывна по t в точке $u = 0, t = \tau$. Значит это уравнение имеет единственный интеграл $u=0$, обращающийся в нуль при $t=\tau$. Отсюда следует, что рассматриваемое уравнение не имеет интегралов, которые стремятся к бесконечности, когда $t\to\tau\pm0$. Теорема, таким образом, доказана.

§ 3. В предыдущем параграфе было доказано существование интегралов $\omega_{ik}(t,\tau)$ и $v_{ik}(t,\tau)$ $(k=1,2,\ldots,n_i+1)$ и для случая $n_0>1$ — интегралов $\omega_{0j}(t,\tau)$ и $v_{0j}(t,\tau)$ $(j=1,2,\ldots,n_0-1)$. Рассмотрим теперь вопрос о существовании интегралов $\omega_{ik}(t,\tau)$, $v_{ik}(t,\tau)$, $\omega_{0j}(t,\tau)$ и $v_{0j}(t,\tau)$, отличных от тех, существование которых было доказано в теоремах I и II.

Из теорем, доказываемых в этом параграфе, будет следовать, что, кроме вышеуказанных интегралов, других интегралов $\omega_{ik}(t,\tau)$, $v_{ik}(t,\tau)$, $\omega_{0j}(t,\tau)$ и $v_{0j}(t,\tau)$ уравнение не имеет.

Теорема III. Уравнение имеет лишь один интеграл $\omega_{ik}(t,\tau)$ и лишь один интеграл $v_{ik}(t,\tau)$ *).

Доказательство. Заменой переменных (8) и (9) приведем уравнение к виду (10). Докажем, что оно имеет единственный интеграл $y_{ik}(x)$, который стремится к нулю при $x\to+0$. Для доказательства воспользуемся хорошо известным методом [2].

Предположим, что имеется два интеграла уравнения $y_{ik}(x)$ и $z_{ik}(x)$, которые стремятся к нулю при $x\to+0$. Положим

$$u_{ik}(x)=y_{ik}(x)-z_{ik}(x).$$

Тогда из (10) находим, что функция $u_{ik}(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{x}{n_i+1}\,\frac{du_{ik}}{dx}=[\psi(x)-1].u_{ik}(x) \tag{19}$$

при начальном условии

$$u_{ik}(0)=0. \tag{20}$$

Здесь введено обозначение:

$$\psi(x)=\chi[x,y_{ik}(x),z_{ik}(x)],$$

где $\chi(x,y,z)$ обозначает функцию, введенную при доказательстве теоремы I.

Докажем, что кроме интеграла $u_{ik}(x)=0$, уравнение (19) не имеет интегралов, удовлетворяющих условию (20). Предположим противное, т. е., что это уравнение имеет интеграл $u_{ik}(x)$, который стремится к нулю при $x\to+0$ и такой, что при некотором $x=x_0>0$ будем иметь:

$$u_{ik}(x)=u_{ik}^{(0)}\neq0.$$

Из уравнения (19) получаем:

$$|u_{ik}(x)|=|u_{ik}^{(0)}|.e^{(n_i+1)\int\limits_{x_0}^{x}\frac{Re\,\psi(x)-1}{x}dx}$$

*) i и k — фиксированные, i — одно из чисел: $1,2,\ldots,m$, k — одно из чисел: $1,2,\ldots,n_i+1$.

Возьмем x_0 настолько малым, чтобы при $x\leqslant x_0$ имело место неравенство:

$$|Re\,\psi(x)|<\frac{1}{2}.$$

Такое x_0 можно найти, так как функция $\psi(x)$ стремится к нулю при $x\to+0$. Это следует из (16) и из определения функции $\psi(x)$. Для x, принадлежащего интервалу $[0,x_0]$, получим:

$$-\frac{3}{2}<Re\,\psi(x)-1<-\frac{1}{2}.$$

Поэтому

$$|u_{ik}(x)|>|u_{ik}^{(0)}|.e^{(n_i+1)\int\limits_{x_0}^{x}\frac{-1}{2x}dx}=|u_{ik}^{(0)}|.\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{2}(n_i+1)}.$$

Отсюда следует, что $u_{ik}(x)\to\infty$, когда $x\to0$, что противоречит начальному условию (20).

Значит, на некотором интервале $[0,\delta]$ функция $u_{ik}(x)=0$ и, следовательно, $y_{ik}(x)=z_{ik}(x)$. А это означает, что всякие два интеграла $\omega_{ik}(t,\tau)$ на интервале $[0,\delta]$ совпадают.

Аналогичная теорема имеет место для интегралов $v_{0j}(t,\tau)$ и $\omega_{0j}(t,\tau)$.

Теорема IV. Если $n_0>1$, то уравнение имеет лишь один интеграл $\omega_{0j}(t,\tau)$ и один интеграл $v_{0j}(t,\tau)$ (j — фиксированное).

Теорема легко доказывается тем же методом, что и теорема III.

§ 4. Из результатов предыдущих параграфов следует, что для каждого $\lambda_i(\tau)$ существует n_i+1 и только n_i+1 интегралов $\omega_{ik}(t,\tau)$ и $v_{ik}(t,\tau)$ и, если $n_0>1$, то существует точно n_0-1 интегралов $\omega_{0j}(t,\tau)$ и $v_{0j}(t,\tau)$.

Кроме интегралов $\omega_{ik}(t,\tau)$, $v_{ik}(t,\tau)$, $\omega_{0j}(t,\tau)$ и $v_{0j}(t,\tau)$ уравнение (2), вообще говоря, может иметь интегралы, стремящиеся к $\lambda_i(\tau)$ при $t\to\tau$ и стремящиеся к бесконечности при $t\to\tau$, для которых не выполняются, соответственно, соотношения (3), (4), (5) и (6). Следующие теоремы исключают возможность существования таких интегралов.

Теорема. V. Всякий интеграл уравнения, стремящийся к $\lambda_i(\tau)$ при $t\to\tau\pm0$, удовлетворяет, соответственно, одному из соотношений (3) или (4).

Доказательство. Записав уравнение (2) в форме (7) и умножив его на $(w-\lambda_i(t))^{n_i}$, получим:

$$(w-\lambda_i(t))^{n_i}\frac{dw}{dt}=A_{i0}(t)+(w(t)-\lambda_i(t)).Q(w,t)$$

или

$$\frac{1}{n_i+1}\,\frac{d(w(t)-\lambda_i(t))^{n_i+1}}{dt}=A_{i0}(t)+(w(t)-\lambda_i(t))Q(w,t)-(w(t)-\lambda_i(t))^{n_i}.\lambda_i'(t).$$

Докажем, сначала, что всякий интеграл $w(t)$, стремящийся к $\lambda_i(\tau)$ при $t\to\tau-0$, удовлетворяет одному из соотношений (3). Возьмем

$m > 0$ настолько малое, чтобы на интервале $[\tau - m, \tau]$ правая часть последнего уравнения была непрерывной функцией от t. Такое m можно выбрать, так как по предположению $w(t) \to \lambda_i(\tau)$ при $t \to \tau - 0$, а функция $Q(w, t)$ по определению голоморфна по w в точке $w = \lambda_i(t)$. Проинтегрируем обе части уравнения по t в пределах от t до τ, где $t \subset [\tau - m, \tau]$, предварительно умножив это уравнение на $n_i + 1$. Получим:

$$(w(t) - \lambda_i(t))^{n_i + 1} = -(n_i + 1)\int_t^\tau A_{io}(t)\,dt -$$

$$-(n_i + 1)\int_t^\tau (w(t) - \lambda_i(t)) . Q(w,t)\,dt + (n_i + 1)\int_t^\tau (w(t) - \lambda_i(t))^{n_i} \lambda_i'(t)\,dt.$$

Можем написать, поделив обе части уравнения на $\tau - t$ и перейдя к пределу при $t \to \tau - 0$:

$$\lim_{t \to \tau - 0} \frac{[w(t) - \lambda_i(t)]^{n_i + 1}}{\tau - t} = -(n_i + 1) A_{io}(\tau). \tag{21}$$

При этом мы учитываем, что подинтегральные функции непрерывны на $[t, \tau]$, что функции $Q(w,t)$, $\lambda'_i(t)$ ограничены и что $\lim\limits_{t \to \tau - 0} w(t) = \lambda_i(\tau)$.

Из (21) получим:

$$\lim_{t \to \tau - 0} \frac{\sqrt[n_i + 1]{\tau - t}}{w(t) - \lambda_i(t)} = \frac{1}{\sqrt[n_i + 1]{-(n_i + 1) A_{io}(\tau)}},$$

т. е.

$$\frac{\sqrt[n_i + 1]{\tau - t}}{w(t) - \lambda_i(t)}$$

стремится при $t \to \tau - 0$ к одному из значений: $\alpha_{i1}(\tau), \alpha_{i2}(\tau), \ldots, \alpha_{in_i+1}(t)$. А это и означает, что интеграл $w(t)$ удовлетворяет одному из соотношений (3) на $[\tau - m, \tau]$.

Рассматривая интеграл $w(t)$, который стремится к $\lambda_i(\tau)$ при $t \to \tau + 0$, мы можем легко показать, что этот интеграл удовлетворяет на некотором интервале $[\tau, \tau + n]$ одному из соотношений (4).

Теорема VI. Всякий интеграл уравнения, стремящийся к бесконечности, при $t \to \tau \pm 0$, удовлетворяет, соответственно, одному из соотношений (5) или (6).

Доказательство. Предположим, что уравнение имеет интеграл, стремящийся к бесконечности при $t \to \tau - 0$. Из теоремы II следует тогда, что для этого уравнения $n_0 > 1$. Представив уравнение (2) в виде (17) и разделив обе части уравнения на $(w(t))^{n_0}$, получим:

$$\frac{1}{1 - n_0} \frac{dw^{1 - n_0}}{dt} = A_{on_0}(t) + \frac{1}{w} R(w(t), t). \tag{22}$$

Существует интервал $[\tau - p, \tau]$ $(p > 0)$ такой, что для t, принадлежащего этому интервалу, правая часть уравнения непрерывна. Это следует из того, что функция $R(w(t), t)$ голоморфна на бесконечности и что по предположению $w(t) \to \infty$, когда $t \to \tau - 0$. Умножим обе части равенства (22) на $1 - n_0$ и проинтегрируем по t в пределах от t до $\tau (t \subset [\tau - p, \tau]$. Получим:

$$(w(\tau))^{1 - n_0} - (w(t))^{1 - n_0} = \int_t^\tau A_{on_0}(t)\,dt + (1 - n_0)\int_t^\tau \frac{R(w,t)}{w(t)}\,dt.$$

Но так как $n_0 > 1$ и

$$\lim_{t \to \tau - 0} w(t) = \infty,$$

то $(w(\tau))^{1 - n_0} = 0$. Поэтому, поделив обе части равенства на $\tau - t$ и переходя к пределу при $t \to \tau - 0$, будем иметь:

$$\lim_{t \to \tau - 0} \frac{1}{(w(t))^{n_0 - 1}(\tau - t)} = (n_0 - 1) A_{on_0}(\tau).$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{t \to \tau - 0} (w(t)^{n_0 - 1} . \sqrt{\tau - t})$$

равен одному из чисел: $\alpha_{o1}(\tau), \alpha_{o2}(\tau), \ldots, \alpha_{on_0 - 1}(\tau)$, т. е. интеграл $w(t)$ удовлетворяет одному из соотношений (5) на $[\tau - p, \tau]$.

Из теорем этого параграфа следует, что всякий интеграл, стремящийся к $\lambda_i(\tau)$ при $t \to \tau$, есть один из интегралов $\omega_{in}(t, \tau)$ или $v_{in}(t, \tau)$ и что всякий интеграл, стремящийся к бесконечности при $t \to \tau$, есть один из интегралов $\omega_{oj}(t, \tau)$ или $v_{oj}(t, \tau)$. Значит, уравнение не имеет интегралов, стремящихся к $\lambda_i(\tau)$ или к бесконечности, отличных от интегралов, существование которых было доказано в параграфе 2.

Наконец, заметим, что, как легко показать, уравнение (2) не имеет интегралов, не стремящихся к определенному пределу при $t \to \tau - 0$ или при $t \to \tau + 0$.

§ 5. Займемся теперь изучением некоторых свойств интегралов $\omega_{ik}(t, \tau)$, $v_{ik}(t, \tau)$, $\omega_{oj}(t, \tau)$ и $v_{oj}(t, \tau)$.

Целью этого и нескольких следующих параграфов является доказательство того, что каждая из функций $\omega_{ik}(t, \tau)$ имеет производную по τ, непрерывную в некотором интервале.

Введем в рассмотрение функцию $\xi_{ik}(t, \tau)$, связанную с функцией $\omega_{ik}(t, \tau)$ соотношением:

$$\xi(t, \tau) = (\tau - t)\left(\frac{(\tau - t)^{\frac{1}{n_i + 1}}}{\omega_{ik}(t, \tau) - \lambda_i(t)} - \alpha_{ik}(t)\right) \tag{23}$$

или с функцией $y_{ik}(t, \tau)$, рассмотренной в параграфе 2 при доказательстве теоремы I, соотношением:

$$\xi(t,\tau)=y_{1k}(t,\tau).(\tau-t). \tag{24}$$

Так как $y_{1k}(t,\tau)\to 0$, когда $t\to\tau-0$, то

$$\lim_{t\to\tau-0}\frac{\xi(t,\tau)}{\tau-t}=0. \tag{25}$$

Из уравнения (7) найдем после некоторых преобразований уравнение, которому удовлетворяет функция $\xi(t,\tau)$. Запишем это уравнение в виде:

$$\frac{d\xi}{dt}=f(\xi,t,\tau), \tag{26}$$

где

$$f(\xi,t,\tau)=-A_{10}\left(\frac{1}{2}\,(n_1+1)(n_1+2)\,\alpha_{1k}^{n_1}\frac{\xi^2}{(\tau-t)^2}+\ldots+\frac{\xi^{n_1+1}}{(t-\tau)^{n_1+1}}-\right.$$

$$-\alpha_{1k}.(\tau-t)+\lambda_1'\frac{(\xi+(\tau-t)\alpha_{1k})^2}{(\tau-t)^{\frac{n_1+2}{n_1+1}}}-Q(\omega_{1k},t)\frac{(\xi+(\tau-t)\alpha_{1k})^{n_1+1}}{(\tau-t)^{n_1\frac{n_1+2}{n_1+1}}}.$$

Здесь

$$\omega_{1k}=\lambda_1(t)+(\tau-t)^{\frac{1}{n_1+1}}\cdot\frac{(\tau-t)}{\xi+\alpha_{1k}(\tau-t)}. \tag{27}$$

Докажем, что существует производная по τ от функции $\xi(t,\tau)$ и что эта производная непрерывна на некотором интервале. Затем, воспользовавшись соотношением (27), докажем существование и непрерывность на некотором интервале производной по τ от функции $\omega_{1k}(t,\tau)$.

Установим предварительно необходимые нам в дальнейшем свойства функции $f(\xi,t,\tau)$.

Обозначим через Δ_s область, определенную неравенствами:

$$a\le t\le b,\ a\le\tau\le b,\ 0\le\tau-t\le S,$$

где a и b — концы интервала $[a,b]$, а S — некоторая постоянная. Мы будем считать, что t и τ принадлежат этой области.

Легко могут быть доказаны следующие свойства функции $f(\xi,t,\tau)$:

А) Существует постоянная $K>0$ такая, что если

$$|\xi(t,\tau)|<K(\tau-t)^{\frac{n_1+2}{n_1+1}}, \tag{28}$$

то

$$|f(\xi,t,\tau)|<K.(\tau-t)^{\frac{1}{n_1+1}}. \tag{29}$$

В) Существует число θ_0 ($\theta_0>\tau$) такое что если $\xi(t,\tau)$ удовлетворяет условию (28), то для любых θ_1 и $\theta_2\in[\theta_0,\tau]$ будем иметь:

$$|(f\xi(t,\tau),t,\theta_1)-f(\xi(t,\tau)t,\theta_2)|<\frac{M|\theta_1-\theta_2|}{(\tau-t)^{\frac{n_1}{n_1+1}}} \tag{30}$$

где M — некоторая постоянная.

С (Если функции $\xi(t,\tau)$ $\eta(t,\tau)$ удовлетворяют неравенству (28), то существует постоянная N такая, что

$$|f(\xi(t,\tau),t,\tau)-f(\eta(t,\tau),t,\tau)|<\frac{N|\xi-\eta|}{(\tau-t)^{\frac{n_1}{n_1+1}}}. \tag{31}$$

Заметим еще, что можно получить следующие оценки для производных:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial\tau}\right|<\frac{M}{(\tau-t)^{\frac{n_1}{n_1+1}}}, \tag{32}$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial\xi}\right|<\frac{N}{(\tau-t)^{\frac{n_1}{n_1+1}}}. \tag{33}$$

§ 6. Для того, чтобы исследовать свойства функции $\xi(t,\tau)$, введенной в предыдущем параграфе, рассмотрим предварительно некоторую последовательность функций, определенную при помощи уравнения (26).

Положим:

$$\zeta_0(t,\tau)\equiv 0,$$

$$\zeta_{n+1}(t,\tau)=\int_t^\tau f(\zeta_n,t,\tau)\,dt,\ n=0,1,2,\ldots-$$

Рассмотрим некоторые свойства функций $\zeta_n(t,\tau)$.

Теорема VII. В области Δ_S последовательность функций $\{\zeta_n(t,\tau)\}$ равномерно сходится [1]).

Доказательство. Докажем сначала, что в Δ_S все функции $\zeta_n(t,\tau)$ удовлетворяют неравенству (28). Предположим, что функция ζ_n удовлетворяет этому неравенству. Тогда для функции $f(\zeta_n,t,\tau)$ имеет место соотношение (29) и мы можем написать:

$$|\zeta_{n+1}|\le\int_t^\tau f|\zeta_n,t,\tau)|\,dt<K(\tau-t)^{\frac{n_1+2}{n_1+1}}.$$

Но функция ζ_0 удовлетворяет неравенству (28). Значит, по доказанному этому неравенству удовлетворяют все функции ζ_n $(n=0,1,2\ldots)$ Из

---

[1]) При достаточно малом S

свойства (C) функции $f(\xi, t, \tau)$ следует тогда, что для функций ζ_n и ζ_{n+1} выполняется неравенство:

$$|f(\zeta_{n+1}, t, \tau) - f(\zeta_n, t, \tau)| < \frac{N.|\zeta_{n+1} - \zeta_n|}{(\tau - t)^{\frac{n_1}{n_1+1}}}. \tag{34}$$

Рассмотрим далее ряд:

$$(\zeta_1 - \zeta_0) + (\zeta_2 - \zeta_1) + \dots + (\zeta_{n+1} - \zeta_n) + \dots .$$

Оценим по модулю члены этого ряда, воспользовавшись определением функций ζ_n и соотношениями (28) и (34). Получим:

$$|\zeta_{n+1} - \zeta_n| < Kq^n (\tau - t)^{\frac{n_1+2}{n_1+1}},$$

где

$$q = N.(t-t)^{\frac{1}{n_1+1}} \leq S^{\frac{1}{n_1+1}} N.$$

Отсюда ясно, что в области Δ_S (при достаточно малом S) рассматриваемый ряд сходится и притом равномерно.

Из этой теоремы следует, что существует для последовательности $\{\zeta_n(t, \tau)\}$ предельнгя функция $\zeta(t, \tau)$. Обычным методом легко показать, что эта функция является единственным решением уравнения (26), обращающимся в нуль при $t = \tau$[1]). Отсюда можно заключить, что функция $\xi(t, \tau)$, введенная в параграфе 5, в области Δ_S совпадает с функцией $\zeta(t, \tau)$. Значит, функция $\xi(t, \tau)$ является предельной функцией для последовательности $\{\zeta_n\}$[2]). Отсюда заключаем, что для функции $\xi(t, \tau)$ выполняется соотношение (28) и, следовательно, на основании (B) и (C) свойств функции $f(\zeta, t, \tau)$ мы будем иметь:

$$|f(\xi(t, \tau), t, \vartheta) - f(\xi(t, \tau) t, \tau)| < \frac{M|\vartheta - \tau|}{(\tau - t)^{\frac{n_1}{n_1+1}}} \tag{35}$$

и

$$|f(\xi(t, \vartheta), t, \tau) - f(\xi(t, \tau), t, \tau)| < \frac{N\xi(t, \vartheta) - \xi(t, \tau)|}{(\vartheta - t)^{\frac{n_1}{n_1+1}}} < \frac{N.|\xi(t, \vartheta) - (t, \tau)|}{(\tau - t)^{\frac{n_i}{n_i+1}}} \tag{36}$$

Здесь t и τ принадлежат области Δ_S, а $\vartheta > \tau$ и достаточно близко к τ. Кроме того, для функции $f(\xi, t, \tau)$ выполняются соотношения (32) и (33).

§ 7. Перейдем теперь непосредственно к доказательству существования производной $\dfrac{d\xi}{d\tau}$.

---

[1]) Доказательство единственности полученного решения уравнения (26) можно проделать аналогично доказательству единственности интеграла $\omega_{ik}(t, \tau)$, которое изложено в параграфе 3.

[2]) Существование интеграла уравнения (26) вытекает из определения функции ξ через функцию $\omega_{ik}(t, \tau)$ и из теоремы I (§ 2). Мы доказали еще раз существование этого интеграла методом последовательных приближений, так как этот метод дает нам возможность получить необходимые соотношения для функции $\xi(t, \tau)$.

Рассмотрим функцию:

$$\varphi(t, \tau, \vartheta) = \frac{\xi(t, \vartheta) - \xi(t, \tau)}{\vartheta - \tau}, \tag{37}$$

где $\xi(t, \tau)$ определяется соотношением (23). Учитывая, что функция $\xi(t, \tau)$ удовлетворяет уравнению (26), получим для функции $\varphi(t, \tau, \vartheta)$ уравнение:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{f(\xi(t, \vartheta), t, \vartheta) - f(\xi(t, \tau), t, \tau)}{\vartheta - \tau}$$

или

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Phi_1 + \Phi_2 . \varphi, \tag{38}$$

где

$$\Phi_1(\xi(t, \tau), t, \vartheta) = \frac{f(\xi(t, \tau), t, \vartheta) - f(\xi(t, \tau), t, \tau)}{\vartheta - \tau},$$

$$\Phi_2(\xi(t, \tau), \xi(t, \vartheta), t, \vartheta) = \frac{f(\xi(t, \vartheta), t, \vartheta) - f(\xi(t, \tau), t, \vartheta)}{\xi(t, \vartheta) - \xi(t, \tau)}.$$

Далее, получим

$$\lim_{t \to \tau - 0} \varphi(t, \tau, \vartheta) = \lim_{t \to \tau - 0} \frac{\xi(t, \vartheta) - \xi(t, \tau)}{\vartheta - \tau} = \frac{\xi(\tau, \vartheta)}{\vartheta - \tau}.$$

Отсюда заключаем, что функция $\varphi(t, \tau, \vartheta)$ является решением уравнения (38) при начальном условии:

$$\varphi(\tau, \tau, \vartheta) = \frac{\xi(\tau, \vartheta)}{\vartheta - \tau}.$$

Рассматривая это уравнение, как линейное относительно функции $\varphi(t, \tau, \vartheta)$, и находя решение этого уравнения, удовлетворяющее данному начальному условию, получим для функции $\varphi(t, \tau, \vartheta)$ следующее выражение:

$$\varphi(t, \tau, \vartheta) = \frac{\xi(\tau, \vartheta)}{\vartheta - \tau} e^{-\int_t^\tau \Phi_2 dt} - e^{-\int_t^\tau \Phi_2 dt} . \int_t^\tau \Phi_1 . e^{\int_t^\tau \Phi_2 dt} dt. \tag{39}$$

Мы докажем, что при $\vartheta \to \tau + 0$ существует предел выражения (39) и что этот предел равен:

$$- e^{-\int_t^\tau f'_\xi dt} . \int_t^\tau f'_\tau . e^{\int_t^\tau f'_\xi dt} dt. \tag{40}$$

Установим предварительно некоторые свойства функций $\Phi_1(\xi(t, \tau), t, \tau, \vartheta)$ и $\Phi_2(\xi) t, \tau), \xi(t, \vartheta), t, \vartheta)$.

Из вида функции $f(\xi, t, \tau)$ следует, что существуют производные f'_ξ и f'_τ и что эти производные непрерывны по τ для τ достаточно близкого к t, $\tau > t$ (при $\tau \to t$ эти производные стремятся к бесконечности).

Далее ясно, что

$$\lim_{\vartheta \to \tau+0} \Phi_1 = f'_\tau \tag{41}$$

и

$$\lim_{\vartheta \to \tau+0} \Phi_2 = f'_\xi \, . \tag{42}$$

Кроме того, из (32) и (33) получим.

$$\left|\Phi_1\right| < \frac{M}{(\tau - t)^{\frac{n_1}{n_1+1}}} \tag{43}$$

$$\left|\Phi_2\right| < \frac{N}{(\vartheta - t)^{\frac{n_1}{n_1+1}}} < \frac{N}{(\tau - t)^{\frac{n_1}{n_1+1}}} \, . \tag{44}$$

Докажем теперь, что при $\vartheta \to \tau + 0$

$$\left| \int_t^\tau \Phi_2 dt - \int_t^\tau f'_\xi \, dt \right| \to 0. \tag{45}$$

Пусть $t < t_0 < \tau$. Интервал $[t, \tau]$ разбиваем на два интервала: $[t, t_0]$ и $[t_0, \tau]$.
Тогда будем иметь:

$$\left| \int_t^\tau \Phi_2 \, dt - \int_t^\tau f'_\xi \, dt \right| \leqslant \int_t^{t_0} \left|\Phi_2 - f'_\xi\right| dt + \int_{t_0}^\tau \left|\Phi_2 - f'_\xi\right| dt \, . \tag{46}$$

Для оценки второго слагаемого правой части воспользуемся неравенствами (33) и (44). Будем иметь:

$$\int_{t_0}^\tau \left|\Phi_2 - f'_\xi\right| dt \leqslant \int_{t_0}^\tau \left|\Phi_2\right| dt + \int_{t_0}^\tau \left|f'_\xi\right| dt < 2\mathrm{N} \int_{t_0}^\tau (\tau - t)^{\frac{n_1}{n+1}} \, dt =$$

$$= 2N(n_1 + 1)(\tau - t_0)^{\frac{1}{n_1+1}} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ [1]}$$

если взять t_0 достаточно близко к τ.

Фиксируем это t_0. Тогда первое слагаемое в правой части (46) может быть сделано также меньше $\frac{\varepsilon}{2}$, если ϑ взять достаточно близко к τ. Это следует из соотношения (42). При этом надо учесть, что на интервале $[t, t_0]$ функция Φ_2 стремится к f'_ξ равномерно.

[1] ε — сколь угодно малое положительное число

Таким образом, соотношение (45) доказано.

Аналогично доказывается при помощи соотношений (32), (41) и (43), что

$$\int_t^\tau \Phi_1 \cdot e^{\int_t^\tau \Phi_2 dt} \cdot dt \to \int_t^\tau f'_\tau \cdot e^{\int_t^\tau f'_\xi \, dt} \cdot dt \text{ при } \vartheta \to \tau + 0 \, . \tag{47}$$

Из этого результата и из того, что

$$\lim_{\vartheta \to \tau+0} \frac{\xi(\tau, \vartheta)}{\vartheta - \tau} = 0$$

получим;

$$\lim_{\vartheta \to \tau+0} \varphi(t, \tau, \vartheta) = -e^{-\int_t^\tau f'_\xi \, dt} \cdot \int_t^\tau f_1 \cdot e^{\int_t^\tau f'_\xi \, dt} \, dt \, . \tag{48}$$

Мы доказали, таким образом, существование правой производной от функции $\xi(t, \tau)$ по τ. Если рассмотреть функцию $\varphi(t, \tau, \vartheta)$ для $\vartheta < \tau$, то можно аналогично доказать существование левой производной от функции $\xi(t, \tau)$ и совпадение ее с правой производной. Итак, доказано, что производная $\frac{d\xi}{d\tau}$ существует и равна выражению (40).

Из вида производной $\frac{d\xi}{d\tau}$ следует, что эта производная непрерывна по τ при $\tau > t$. Легко показать, что при $\tau = t$ эта производная также непрерывна. В самом деле, из (37) видно, что $\frac{d\xi}{d\tau} = 0$ при $\tau = t$. С другой стороны, выражение (40) также стремится к нулю при $\tau \to t + 0$.

Теперь вернемся к функции $\omega_{ik}(t, \tau)$. Из (27) получим:

$$\frac{d\omega_{ik}}{d\tau} = (\tau - t)^{-\frac{n_1}{n_1+1}} \cdot \left(\frac{1}{n_1+1} \cdot \frac{1}{\frac{\xi}{\tau - t} + \alpha_{ik}} - \frac{\frac{d\xi}{d\tau}}{\left(\frac{\xi}{\tau - t} + \alpha_{ik}\right)^2} + \right. \tag{49}$$

$$\left. + \frac{\frac{\xi}{\tau - t}}{\left(\frac{\xi}{\tau - t} + \alpha_{ik}\right)^2} \right).$$

Отсюда видно, что если t и τ принадлежат области Δ_s (при достаточно малом s), то существует производная $\frac{d\omega_{ik}}{d\tau}$, которая будет непрерывна при всяком $\tau \neq t$. При $\tau \to t+0$ эта производная стремится к бесконечности, как $\frac{1}{(\tau-t)^{\frac{n_i}{n_i+1}}}$.

§ 8. Получим необходимые нам в дальнейшем оценки для $\arg(\omega_{ik}(t,\tau)-\lambda_i(t))$ и $\arg\frac{d\omega_{ik}}{d\tau}$.

Из (27) имеем:

$$\arg(\omega_{ik}(t,\tau)-\lambda_i(t)) = -\arg\left(\frac{\xi}{\tau-t}+\alpha_{ik}\right).$$

Отсюда, учитывая соотношение (25), получим;

$$\lim_{\tau\to t+0}\arg(\omega_{ik}(t,\tau)-\lambda_i(t)) = -\arg\alpha_{ik}(t).$$

Это означает, что для τ достаточно близкого к $t\,(\tau>t)$ мы будем иметь неравенство:

$$-\arg\alpha_{ik}(t)-\frac{\pi}{2(n_i+1)}<\arg(\omega_{ik}(t,\tau)-\lambda_i(t))<-\arg\alpha_{ik}(t)+\frac{\pi}{2(n_i+1)}. \tag{50}$$

Аналогично из (49) получим, принимая во внимание (25) и что $\frac{d\xi_{ik}}{d\tau}=0$ при $\tau=t$:

$$\lim_{\tau\to t+0}\arg\frac{d\omega_{ik}}{d\tau} = -\arg\alpha_{ik}(t), \tag{51}$$

т. е. для τ достаточно близкого к $t\,(\tau>t)$

$$-\arg\alpha_{ik}(t)-\frac{\pi}{2}<-\arg\frac{d\omega_{ik}}{d\tau}<-\arg\alpha_{ik}(t)+\frac{\pi}{2}. \tag{52}$$

Аналогичные рассуждения могут быть проведены для функций $\omega_{oj}(t,\tau)$, $v_{ik}(t,\tau)$ и $v_{oj}(t,\tau)$. При этом для доказательства существования $\frac{d\omega_{oj}}{d\tau}$ надо ввести вспомогательную функцию

$$\xi_{oj}(t,\tau) = (\tau-t)\left(\omega_{oj}(t,\tau)\sqrt[n_0-1]{\tau-t}-\alpha_{oj}(t)\right).$$

Также получаем оценки для $\arg\omega_{oj}(t,\tau)$ и $\arg\frac{d\omega_{oj}}{dt}$:

$$\arg\alpha_{oj}-\frac{\pi}{2(n_0-1)}<\arg\omega_{oj}(t,\tau)<\arg\alpha_{oj}+\frac{\pi}{2(n_0-1)},$$

$$\arg\alpha_{oj}-\frac{\pi}{2}<\arg\frac{d\omega_{oj}}{d\tau}<\arg\alpha_{oj}+\frac{\pi}{2}$$

для $\tau>t$ и достаточно близкого к t.

Для $\arg(v_{ik}(t,\tau)-\lambda_i(t))$ и $\arg\frac{dv_{ik}}{d\tau}$ будем иметь, соответственно:

$$\arg\beta_{ik}(t)-\frac{\pi}{2(n_i+1)}<\arg(v_{ik}(t,\tau)-\lambda_i(t))<\arg\beta_{ik}(t)+\frac{\pi}{2(n_i+1)}$$

и

$$\arg\beta_{ik}(t)-\frac{\pi}{2}<\arg\frac{dv_{ik}}{d\tau}<\arg\beta_{ik}(t)+\frac{\pi}{2}.$$

§ 9. Обозначим через $L_{ik}(t,\tau_0)$ кривую

$$w=\omega_{ik}(t,\tau)\ \ (\omega_{ik}(t,t)=\lambda_i(t)),$$

где τ изменяется в интервале $[t,\tau_0]$. Из рассуждений предыдущих параграфов можно сделать некоторые заключения относительно вида кривых $L_{ik}(t,\tau_0)$.

Можно взять τ_0 настолько близко к t, что кривые L_{ik} и $L_{i'k}\,(i\neq i')$ не пересекаются между собой при всех k. Это следует из того, что $\omega_{ik}(t,\tau)$ стремится к $\lambda_i(t)$, а $\omega_{i'k}(t,\tau)$ стремится к $\lambda_{i'}(t)$ при $\tau\to t+0$[1].

Возьмем, далее, τ_0 настолько близко к t, чтобы на полуинтервале $(t,\tau_0]$ существовала непрерывная производная $\frac{d\omega_{ik}}{d\tau}$ и выполнялись неравенства (50) и (52). Из (51) видно, что касательная к кривой L_{ik} стремится к определенному предельному положению при $\tau\to t+0$. Следовательно, кривые $L_{ik}(t,\tau_0)$ $(t\leqslant\tau\leqslant\tau_0)$ есть гладкие кривые Жордана.

Воспользовавшись неравенством (52), легко показать, что кривая L_{ik}[2] не имеет самопересечений, т. е., что она является простой дугой Жордана. Действительно, если предположить, что

$$\omega_{ik}(t,\tau_1)=\omega_{ik}(t,\tau_2)\ \ (\tau_1\neq\tau_2),$$

то из геометрических соображений следует:

$$\left|\arg\frac{d\omega_{ik}(t,\tau_1)}{d\tau}-\arg\frac{d\omega_{ik}(t,\tau_2)}{d\tau}\right|\geqslant\pi. \tag{53}$$

---

[1] Заметим, что $\lambda_i(t)\neq\lambda_{i'}(t)$ при всех $t\subset[a,b]$. Это следует из свойства (I) функции $P(w,t)$.

[2] i и k считаем фиксированными.

С другой стороны из (52) получаем:

$$\left| \arg \frac{d\omega_{ki}(t,\tau_1)}{d\tau} + \arg \alpha_{ik}(t) \right| < \frac{\pi}{2}$$

и

$$\left| \arg \frac{d\omega_{ik}(t,\tau_2)}{d\tau} + \arg \alpha_{ik}(t) \right| < \frac{\pi}{2}$$

или

$$\left| \arg \frac{d\omega_{ik}(t,\tau_1)}{d\tau} - \arg \frac{d\omega_{ik}(t,\tau_2)}{d\tau} \right| < \pi ,$$

что противоречит неравенству (53).

Далее, из неравенства (50) следует, что кривые $L_{ik}(t,\tau_0)$ расположены, соответственно, в секторах Λ_k:

$$-\arg \alpha_{ik}(t) - \frac{\pi}{2(n_i+1)} < \arg(\omega_{ik}(t,\tau) - \lambda_i(t)) < \arg \alpha_{ik}(t) + \frac{\pi}{2(n_i+1)}$$

которые не имеют общих точек, кроме точки $\lambda_i(t)$, и, следовательно, кривые $L_{ik}(t,\tau_0)$ $(k=1,2\ldots n_i+1)$ между собой не пересекаются.

Обозначим через $C_{ik}(t,\tau_0)$ кривую

$$w = v_{ik}(\tau_0,\tau)\ (v_{ik}(\tau_0,\tau_0) = \lambda_i(\tau_0)) ,$$

где τ изменяется в интервале $[t,\tau_0]$. Из свойств интегралов $v_{ik}(t,\tau)$ будет следовать, что эти кривые обладают такими же свойствами, что и кривые $L_{ik}(t,\tau_0)$.

Если $n_0 > 1$, то можно аналогичным образом определить кривые $L_{oj}(t,\tau_0)$ и $C_{oj}(t,\tau_0)$ при помощи интегралов $\omega_{oj}(t,\tau)$ и $v_{oj}(t,\tau)$. Каждая такая кривая есть простая гладкая дуга Жордана. Различные кривые этого вида между собой пересекаются только в бесконечности [1]). Это непосредственно следует из указанных выше свойств интегралов ω_{oj} и v_{oj}.

§ 10. Введем следующие обозначения. Через $G(t,\tau_0)$ обозначим область, полученную из плоскости проведением разрезов по кривым $L_{ik}(t,\tau_0)$ и $L_{oj}(t,\tau_0)$ $(i=1,2\ldots,m;\ k=1,2,\ldots,n_i+1;\ j=1,2,\ldots,n_0-1)$.

Через $H(t,\tau_0)$ обозначим область, полученную из плоскости проведением разрезов по кривым $C_{ik}(t,\tau_0)$ и $C_{oj}(t,\tau_0)$. Заметим, что кривые $L_{oj}(t,\tau_0)$ и $C_{oj}(t,\tau_0)$ будут только в случае, если $n_0 > 1$.

Далее, будем обозначать через $f(t, w_0, \tau_0)$ интеграл уравнения (1), который при $t=\tau_0$ принимает значение w_0. Этот интеграл можно рассматривать как функцию начального значения w_0:

$$f(t, w_0, \tau_0) = \varphi(w_0).$$

t мы считаем фиксированным и меньшим τ_0.

После всего вышесказанного можно доказать следующую основную теорему:

[1]) При этом τ_0 надо взять достаточно близко к t.

Теорема VIII. Функция $w=\varphi(w_0)$ отображает взаимно однозначно и конформно область $H_{w_0}(t,\tau_0)$ на область $G_w(t,\tau_0)$.

Доказательство. Обозначим через $f(H_{w_0})$ образ области H_{w_0} при преобразовании

$$w = f(t, w_0, \tau_0) .$$

Докажем, что

$$f(H_{w_0}) \subset G_w. \tag{54}$$

Предположим противное, т. е., что найдется в области $H_{w_0}(t,\tau_0)$ точка w_0 такая, что $\varphi(w_0) \subset G_w$. Это значит, что $\varphi(w_0)$ совпадает с одним из значений $\omega_{ik}(t,\tau)$ или $\omega_{oj}(t,\tau)$ при некотором τ $(t \leqslant \tau \leqslant \tau_0)$, $i=1,2,\ldots,m$, $k=1,2,\ldots,n_i+1$; $j=1,2,\ldots,n_0-1$ (если $n_0>1$). Для определенности предположим, что

$$f(t, w_0, \tau_0) = \omega_{ik}(t,\tau).$$

Из теоремы единственности тогда следует, что это равенство будет справедливо и для любого t', принадлежащего полуинтервалу $[t,\tau)$. Тогда при $t'=\tau$ будем иметь в силу непрерывности:

$$f(\tau, w_0, \tau_0) = \omega_{ik}(\tau,\tau) = \lambda_i(\tau) .$$

Рассмотрим теперь интеграл $f(t', w_0, \tau_0)$ для $t' > \tau$. Этот интеграл при $t'=\tau$ принимает значение $\lambda_i(\tau)$, следовательно, он должен совпадать с одним из интегралов $v_{il}(t,\tau)$ $(l=1,2,\ldots,n_i+1)$, предположим — с $v_{ik}(t,\tau)$:

$$f(t', w_0, \tau_0) = v_{ik}(t',\tau)\ (t' \geqslant \tau) .$$

При $t'=\tau_0$ имеем:

$$f(\tau_0, w_0, \tau_0) = v_{ik}(\tau_0, \tau) ,$$

т. е.

$$w_0 = v_{ik}(\tau_0,\tau) ,$$

что противоречит предположению о том, что w_0 принадлежит области $H_{w_0}(t,\tau_0)$.

Обозначим через $f^{-1}(G_w)$ прообраз области G_w. Аналогично докажем, что

$$f^{-1}(G_w) \subset H_{w_0} .$$

Сопоставляя это с (54), мы видим, что функция $\varphi(w_0)$ отображает $H_{w_0}(t,\tau_0)$ на $G_w(t,\tau_0)$.

Взаимная однозначность отображения непосредственно следует из теорем единственности и конформность—из голоморфности функции $\varphi(w_0)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. П. Куфарев. Об интегралах простейшего дифференциального уравнения с подвижной полярной особенностью правой части. Ученые записки ТГУ, № 1, 1946 г.

2. Picard. Traité d'analyse, т. III.