О параметрическом представлении функций, однолистных в кольце

Г. М. Голузин (Ленинград)

По аналогии с параметрическим представлением однолистных функций в круге Комацу [1] было дано параметрическое представление функций, однолистных в кольце. Его исследование изобилует различными преобразованиями встречающихся при этом специальных (эллиптических) функций. В настоящей заметке дается несколько иной вариант решения того же вопроса и в иной форме; при этом мы не прибегаем к указанным специальным функциям. Благодаря последнему достигается бóльшая простота изложения и видна бóльшая аналогия полученных результатов с соответствующими результатами в случае круга.

Условимся в некоторых обозначениях. В дальнейшем для любого положительного числа $q<1$ употребляется обозначение $q'=\frac{1}{q}$. Далее, через R_q обозначается кольцо $1<|z|<q'$, а через $\overline{R}^q$ — кольцо $1\leqslant|z|\leqslant q'$.

§ 1. Докажем сначала следующую лемму:

Лемма. *Для функции $f(z)$, регулярной в R_q и имеющей на окружности $|z|=1$ вещественную часть, равную постоянной A, в R_q справедливо интегральное представление*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_1^{2\pi}\mathcal{R}(f(z'))\,K_q(zz'^{-1})\,d\theta+iB,\quad z'=q'e^{i\theta}, \tag{1}$$

где B — вещественная постоянная и

$$K_q(\zeta)=\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=-n}^{n}\frac{1+q^{2\nu}\zeta}{1-q^{2\nu}\zeta}=\frac{1+\zeta}{1-\zeta}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1+q^{2\nu}\zeta}{1-q^{2\nu}\zeta}-\frac{1+q^{2\nu}\zeta^{-1}}{1-q^{2\nu}\zeta^{-1}}\right); \tag{2}$$

кроме того, имеем:

$$A=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\mathcal{R}(f(z'))\,d\theta,\quad z'=q'e^{i\theta}. \tag{3}$$

Доказательство*. Запишем разложение функции $f(z)$ в R_q

---

* Для вывода этих, уже известных, результатов следуем идее автора, указанной в работе [2].

в ряд Лорана в виде

$$f(z)=\varphi_1(z)+\varphi_2(z)+c_0, \tag{4}$$

где через $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ обозначены, соответственно, суммы членов с положительными и отрицательными степенями z, а c_0 — свободный член. При этом функция $\varphi_1(z)$ будет регулярна в круге $|z|<q'$ и $\varphi_1(0)=0$, а функция $\varphi_2(z)$ регулярна в области $|z|>1$ и $\varphi_2(\infty)=0$. Задача сводится к тому, чтобы выразить $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$ и c_0 через значения $\mathcal{R}(f(z'))$ на окружности $|z'|=q'$.

Что касается c_0, то имеем:

$$c_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z')\,d\theta,\quad z'=re^{i\theta},\quad 1\leqslant r\leqslant q', \tag{5}$$

откуда при $r=1$ получаем: $\mathcal{R}(c_0)=A$; постоянная же $B=\mathfrak{J}(c_0)$, очевидно, остается неопределенной. Взяв в соотношении (5) $r=q'$, сразу получаем равенство (3).

Считая теперь $z\in R_q$, рассмотрим два предельных соотношения, в которых через γ_r обозначается окружность $|z'|=r$, а интегралы по γ_r берутся по направлению против движения часовой стрелки:

$$\lim_{r\to 1+0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{2\mathcal{R}(f(z'))}{z'-z}\,dz'=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{2\mathcal{R}(f(z'))}{z'-z}\,dz',$$

$$\lim_{r\to q'-0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{2\mathcal{R}(f(z'))}{z'-z}\,dz'=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{q'}}\frac{2\mathcal{R}(f(z'))}{z'-z}\,dz'.$$

Левые части этих соотношений легко вычисляются на основании теории вычетов, а именно, имеем:

$$\lim_{r\to 1+0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{2\mathcal{R}(f(z'))}{z'-z}\,dz'=\lim_{r\to 1+0}\Big[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{\varphi_1(z')}{z'-z}\,dz'+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{\varphi_2(z')}{z'-z}\,dz'+$$
$$+\overline{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{r^2\varphi_1(z')}{r^2-\bar z z'}\,\frac{dz'}{z'}}+\overline{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{r^2\varphi_2(z')}{r^2-\bar z z'}\,\frac{dz'}{z'}}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{2\mathcal{R}(c_0)}{z'-z}\,dz'\Big]=$$
$$=-\varphi_2(z)-\overline{\varphi_1\left(\frac{1}{\bar z}\right)}$$

и аналогично

$$\lim_{r\to q'-0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{2\mathcal{R}(f(z'))}{z'-z}\,dz'=\varphi_1(z)+\overline{\varphi_2\left(\frac{q'^2}{\bar z}\right)}+2A,$$

так что в R_q получаем соотношения

$$\varphi_2(z)+\overline{\varphi_1\left(\frac{1}{\bar z}\right)}=0, \tag{6}$$

$$\varphi_1(z)+\overline{\varphi_2\left(\frac{q'^2}{\bar z}\right)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{q'}}\frac{2\mathcal{R}(f(z'))}{z'-z}\,dz'-2A. \tag{7}$$

По принципу аналитического продолжения эти соотношения будут иметь место, соответственно, всюду в области $|z|>1$ и всюду в круге $|z|<q'$. Исключая из (6) и (7) функцию $\varphi_2(z)$, получим в круге $|z|<q'$ функциональное уравнение для $\varphi_1(z)$:

$$\varphi_1(z)=\varphi_1(q^2z)+F(z)-2A, \tag{8}$$

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{q'}}\frac{2\mathcal{R}(f(z'))}{z'-z}\,dz'. \tag{8'}$$

Применяя в соотношении (8) n раз итерацию, получим в круге $|z|<q'$:

$$\varphi_1(z)=\varphi_1(q^{2n+2}z)+\sum_{\nu=0}^{n}(F(q^{2\nu}z)-2A),$$

что при $n\to\infty$ дает:

$$\varphi_1(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}(F(q^{2\nu}z)-2A). \tag{9}$$

Подставляя выражение (9) в (6), получаем в области $|z|>1$:

$$\varphi_2(z)=-\sum_{\nu=0}^{\infty}(\overline{F(q^{2\nu}\bar z^{-1})}-2A).$$

Для самой же функции $f(z)$ в R_q выводим:

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}(F(q^{2\nu}z)-\overline{F(q^{2\nu}\bar z^{-1})})+A+iB$$

или

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{q'}}\mathcal{R}(f(z'))\left[1+2\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1-q^{2\nu}zz'^{-1}}-\frac{1}{1-q^{2\nu+2}z^{-1}z'}\right)\right]\frac{dz'}{z'}+iB; \tag{10}$$

здесь перестановка знаков суммы и интеграла законна, в силу очевидной равномерной сходимости ряда на $\gamma_{q'}$. Так как

$$2\sum_{\nu=0}^{n}\left(\frac{1}{1-q^{2\nu}zz'^{-1}}-\frac{1}{1-q^{2\nu+2}z^{-1}z'}\right)=\frac{2}{1-zz'^{-1}}-\frac{2}{1-q^{2n+2}z^{-1}z'}+$$
$$+\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{2}{1-q^{2\nu}zz'^{-1}}-\frac{2}{1-q^{2\nu}z^{-1}z'}\right)=\frac{1+zz'^{-1}}{1-zz'^{-1}}-\frac{1+q^{2n+2}z^{-1}z'}{1-q^{2n+2}z^{-1}z'}+$$
$$+\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{1+q^{2\nu}zz'^{-1}}{1-q^{2\nu}zz'^{-1}}-\frac{1+q^{2\nu}z^{-1}z'}{1-q^{2\nu}z^{-1}z'}\right),$$

то, используя полученную отсюда при $n\to\infty$ формулу, можно привести соотношение (10) к виду (1). Лемма доказана.

Остановимся на функции $K_q(\zeta)$, определяемой по формуле (2). Из (2) следует, что она регулярна в области $0<|z|<\infty$, за исключением простых полюсов в точках $\zeta=q^{2\nu}$ ($\nu=0,\pm1,\pm2,\ldots$). Далее, она обладает следующими двумя свойствами: 1) $\mathcal{R}(K_q(\zeta))$ положительна в кольце $q<|\zeta|<1$, 2) максимум и минимум величины $\mathcal{R}(K_q(\zeta))$ на окружности $|\zeta|=r$, $q<r<1$, достигается, соответственно, только в точках $\zeta=r$ и $\zeta=-r$.

Начнем с доказательства свойства 2). Для этого рассмотрим производную

$$u(\zeta)=\frac{\partial}{\partial\varphi}\mathcal{R}(K_q(\zeta))=\mathcal{R}(i\zeta K_q'(\zeta))=-\mathcal{J}(\zeta K_q'(\zeta)),\quad \varphi=\arg\zeta.$$

Она является гармонической функцией в полукольце $q<|\zeta|<1$, $\mathcal{J}(\zeta)>0$. На прямолинейных частях границы этого полукольца $K_q'(\zeta)$ вещественно, а потому $u(\zeta)=0$. Далее, на полуокружности $|\zeta|=1$, $\mathcal{J}(\zeta)>0$ все члены ряда, входящего в выражение (2), — чисто мнимые, а следовательно, чисто мнимым будет и $K_q(\zeta)$, так что $u(\zeta)=0$. На том же основании, пользуясь рядом (2), перегруппированным в виде

$$K_q(\zeta)=1+\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{1+q^{2\nu}\zeta}{1-q^{2\nu}\zeta}-\frac{1+q^{2\nu+2}\zeta^{-1}}{1-q^{2\nu+2}\zeta^{-1}}\right),$$

получаем, что и на полуокружности $|\zeta|=q$, $\mathcal{J}(\zeta)>0$ будет $u(\zeta)=0$. Наконец, из формулы (2) следует, что если ζ приближается к 1, оставаясь в рассматриваемом полукольце, все предельные значения функции $u(\zeta)$ совпадают с предельными значениями функции $\mathcal{R}\left(\frac{2i\zeta}{(1-\zeta)^2}\right)=-\frac{2\mathcal{J}(\zeta)(1-|\zeta|^2)}{|1-\zeta|^4}$, и, следовательно, все они не превосходят нуля. Применяя к $u(\zeta)$ принцип максимума гармонических функций, заключаем, что $u(\zeta)<0$ во всем полукольце $q<|\zeta|<1$, $\mathcal{J}(\zeta)>0$. По принципу симметрии отсюда, далее, заключаем, что в полукольце $q<|\zeta|<1$, $\mathcal{J}(\zeta)<0$ будет $u(\zeta)>0$. Но это и означает, что $\mathcal{R}(K_q(\zeta))$ при фиксированном $|\zeta|=r$, $q<r<1$, как функция от $\varphi=\arg\zeta$, достигает максимума при $\zeta=r$, а минимума — при $\zeta=-r$, т.е. мы доказали свойство 2).

Для доказательства свойства 1) достаточно теперь показать, что $K_q(-r)>0$ при $q<r<1$. Но это следует из того, что $K_q(-1)=0$ и что при $q<r<1$

$$\frac{d}{dr}K_q(-r)=-\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\frac{2q^{2\nu}}{(1+q^{2\nu}r)^2}<0,$$

т. е. $K_q(-r)$ убывает в $q<r<1$.

§ 2. Обращаемся теперь к параметрическому представлению функций, однолистных в кольце. Пусть функция $w=f(z)$ регулярна и однолистна в кольце R_{q_0} и отображает это кольцо на область $|w|>1$ с разрезом по кривой Жордана L, уходящей одним своим концом в ∞ (эту область с разрезом обозначим через B_0), причем отображение таково, что окружность $|z|=1$ переходит в окружность $|w|=1$ и $f(1)=1$.

Укорачивая разрез L, начиная с его конечного конца, получим семейство областей B_t, зависящих от некоторого непрерывного параметра t, изменяющегося в $0\leqslant t\leqslant\infty$, так, что B_0 есть область $|w|>1$ с полным

разрезом L, B_∞ — область $|w|>1$, а при $0\leqslant t'<t''\leqslant\infty$ область $B_{t'}$ содержится в $B_{t''}$, но не совпадает с $B_{t''}$. Обозначим через $w=g(z,t)$ функцию, однолистно отображающую кольцо R_{q_t} на область B_t так, что окружность $|z|=1$ переходит в окружность $|w|=1$ и $g(1,t)=1$. В силу известной теоремы, такое отображение существует и единственно, причем величина q_t', однозначно зависящая от t, является строго возрастающей непрерывной функцией от t. Последнее замечание дает возможность рассматривать t как однозначную, непрерывную и возрастающую функцию от $q'=q_t'$, а также позволяет взять в качестве параметра t любую другую монотонную и непрерывную функцию от q'. Мы выберем параметр t так, чтобы $q_t'=q_0'e^t$, $0\leqslant t<\infty$.

Наряду с функцией $g(z,t)$ введем теперь функцию

$$w=f(z,t)=g^{-1}(g(z,0),t),\quad 0\leqslant t<\infty, \tag{1}$$

которая отображает кольцо R_{q_0} на кольцо R_{q_t} с разрезом по некоторой кривой Жордана, один из концов которой, пусть $\lambda(t)$, лежит на окружности $|w|=q_t'$; при этом окружность $|z|=1$ переходит в окружность $|w|=1$ и $f(1,t)=1$. Далее, имеем: $f(z,0)=z$, $f(z,\infty)=g(z,0)$ (последнее следует из того, что $g(z,\infty)=z$).

Функция $f(z,t)$ является решением некоторого дифференциального уравнения, к выводу которого мы теперь и переходим. С этой целью рассмотрим более общую функцию

$$w=h(z,t',t'')=g^{-1}(g(z,t'),t'')=f(f^{-1}(z,t'),t''),$$
$$0<t'<t''<\infty.$$

Эта функция отображает кольцо $R_{q_{t'}}$ на кольцо $R_{q_{t''}}$ с надлежащим разрезом $S_{t',t''}$, прообразом которого является некоторая дуга $B_{t',t''}$ на окружности $|z|=q_{t'}'$. Легко видеть, что при этом точка $\lambda(t')$ переходит в конец разреза $S_{t',t''}$, лежащий в $R_{q_{t''}}$, а концом разреза $S_{t',t''}$, лежащим на $|w|=q_{t''}'$, будет точка $\lambda(t'')$.

Из предыдущего непосредственно следует, что 1) при фиксированном $t'=t$ и $t''\to t$ дуга $B_{t',t''}$ стягивается в точку $\lambda(t)$ и 2) при фиксированном $t''=t$ и $t'\to t$ дуга $S_{t',t''}$ стягивается в точку $\lambda(t)$. Но тогда и при каждом из этих предельных переходов обе дуги $S_{t',t''}$ и $B_{t',t''}$ одновременно стягиваются в точку $\lambda(t)$. Действительно, продолжая функцию $h(z,t',t'')$ в кольцо $\frac{1}{q_{t'}'}<|z|<q_{t'}'$ и, допуская несходимость ее при одном из рассматриваемых предельных переходов, на основании принципа сгущения и теоремы сходимости однолистных функций (в данном случае нормированных в $z=1$) мы пришли бы к двум различным функциям, однолистно отображающим кольцо $\frac{1}{q_t'}<|z|<q_t'$ в себя так, что точка $z=1$ переходит в точку $w=1$, что невозможно. Отсюда, в частности, следует непрерывность $\lambda(t)$ в $0<t<\infty$.

Образуем теперь функцию

$$\Phi(z)=\log\frac{h(z,t',t'')}{z}+t'-t''. \tag{2}$$

Эта функция регулярна в $R_{q_{t''}}$ и непрерывна в $\overline{R}_{q_{t''}}$; ее вещественная часть на окружности $|z|=1$ равна постоянной $A=t'-t''$, а на окружности $|z|=q_{t''}$ — равна нулю, за исключением дуги $B_{t',t''}$, где она отрицательна. Нормируем $\Phi(z)$ так, чтобы $\Phi(1)=A$. В силу сказанного, к функции $\Phi(z)$ и кольцу $R_{q_{t''}}$ применима лемма, так что для $z\in R_{q_{t''}}$ получаем интегральное представление:

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{B_{t',t''}}\mathcal{R}(\Phi(z'))\,K_{q_{t''}}(zz'^{-1})\,d\theta+iB,\qquad z'=q'_{t''}e^{i\theta};\tag{3}$$

кроме того, имеем:

$$A=t'-t''=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{B_{t',t''}}\mathcal{R}(\Phi(z'))\,d\theta.\tag{4}$$

Используя нормировку $\Phi(1)=A$, из формулы (3) получаем:

$$B=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{B_{t',t''}}\mathcal{R}(\Phi(z'))\,\mathfrak{J}(K_{q_{t''}}(z'^{-1}))\,d\theta,$$

так что представление (3) можно записать иначе:

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{B_{t',t''}}\mathcal{R}(\Phi(z'))\,[K_{q_{t''}}(zz'^{-1})-i\mathfrak{J}(K_{q_{t''}}(z'^{-1})]\,d\theta.\tag{5}$$

Применим формулу (5) для точки $z=f(z^*,t')$, $z^*\in R_{q_0}$; заменив z^* на z, будем иметь в R_{q_0}:

$$\log\frac{f(z,t'')}{f(z,t')}+t'-t''=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{B_{t',t''}}\mathcal{R}(\Phi(z'))\,[K_{q_{t''}}(f(z,t')\,z'^{-1})-i\mathfrak{J}(K_{q_{t''}}(z'^{-1}))]\,d\theta.$$

Если здесь отделить вещественную и мнимую части, то, в силу постоянства знака у $\mathcal{R}(\Phi(z'))$ на $B_{t',t''}$, к полученным вещественным интегралам применима теорема о среднем, и мы будем иметь:

$$\log\frac{f(z,t'')}{f(z,t')}+t'-t''=$$

$$=\mathcal{R}([K_{q_{t''}}(f(z,t')\,c_1^{-1})-i\mathfrak{J}(K_{q_{t''}}(c_1^{-1}))])\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{B_{t',t''}}\mathcal{R}(\Phi(z'))\,d\theta+$$

$$+i\mathfrak{J}([K_{q_{t''}}(f(z,t')\,c_2^{-1})-i\mathfrak{J}(K_{q_{t''}}(c_2^{-1}))])\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{B_{t',t''}}\mathcal{R}(\Phi(z'))\,d\theta,\tag{6}$$

где c_1 и c_2 — некоторые точки на $B_{t',t''}$. Разделим соотношение (6) на постоянную (4) и совершим в полученном равенстве любой из рассмотренных предельных переходов. Так как при этом точки c_1 и c_2 будут стягиваться в $\lambda(t)$, то в результате получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial\log f(z,t)}{\partial t}-1=-K_{q_t}(f(z,t)\,\lambda^{-1}(t))+i\mathfrak{J}(K_{q_t}((\lambda^{-1}(t))),\tag{7}$$

причем из условия $f(1,t)\equiv 1$ следует, что $\mathcal{R}(K_{q_t}(\lambda^{-1}(t)))=1$. Итак, функция $f(z,t)$ является решением дифференциального уравнения

$$\frac{\partial\log f}{\partial t}=-K_{q_t}(kfq_t)+K_{q_t}(kq_t),\tag{8}$$

удовлетворяющим начальному условию $f(z,0)=z$; здесь $q_t=q_0e^{-t}$, а $k=k(t)$ — некоторая непрерывная функция в $0\leqslant t<\infty$, по модулю равная единице. Вспомнив, кроме того, что $f(z,\infty)=g(z,0)$, можно формулировать полученный результат в виде теоремы.

Теорема 1. *Каждой двухсвязной области B, представляющей область $|w|>1$ с разрезом вдоль некоторой непрерывной кривой L без кратных точек, уходящей одним концом в ∞, можно поставить в соответствие непрерывную в $0\leqslant t<\infty$ комплексную функцию $k=k(t)$ с $|k(t)|=1$, такую, что для функции $w=f(z)$, $f(1)=1$, однолистно отображающей некоторое кольцо R_q на B, имеем в R_q представление*

$$f(z)=f(z,\infty)=\lim_{t\to\infty}f(z,t),\tag{9}$$

где $f(z,t)$ есть решение дифференциального уравнения (8) или, что то же, уравнения

$$\frac{\partial\log f}{\partial t}=-\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1+q_t^{2\nu+1}kf}{1-q_t^{2\nu+1}kf}-\frac{1+q_t^{2\nu+1}k}{1-q_t^{2\nu+1}k}\right),\tag{10}$$

удовлетворяющее начальному условию $f|_{t=0}=z$. Здесь $q_t=q_0e^{-t}$.

Опираясь на свойство единственности решений дифференциальных уравнений, а также на аналитическую зависимость их от начальных значений, как и в случае круга, докажем обратную теорему.

Теорема 2. *Для каждой заданной комплексной функции $k=k(t)$, непрерывной или кусочно непрерывной в $0\leqslant t<\infty$ и по модулю равной единице, решение дифференциального уравнения (8), удовлетворяющее начальному условию $f|_{t=0}=z$, таково, что предел $\lim\limits_{t\to\infty}f(z,t)=f(z)$ существует и дает функцию, регулярную и однолистную в кольце R_q и по модулю равную единице на окружности $|z|=1$. Здесь $q_t=qe^{-t}$.*

Отметим, что в случаях, когда рассмотренная выше область B_0 представляет область $|w|>1$ с разрезом по части положительной или по части отрицательной вещественной полуоси, соответствующие им функции $k=k(t)$ будут тождественно равны 1 и -1.

Далее, в общем случае, отделяя в уравнении (8) вещественные части, получаем уравнение

$$\frac{\partial\log q_t|f|}{\partial t}=-\mathcal{R}(K_{q_t}(kfq_t)).\tag{11}$$

В силу отмеченной в § 1 положительности величины $\mathcal{R}(K_q(\zeta))$ в $q<|\zeta|<1$, из уравнения (11) следует, что $q_t|f|$ является возрастающей функцией от t в $0 \leqslant t < \infty$, — свойство, которое может быть полезно при решении экстремальных задач для соответствующих классов однолистных функций и которое уже использовалось Комацу [1].

(Поступило в редакцию 29/I 1951 г.)

Литература

1. Y. Komatu, Untersuchungen über konforme Abbildung zweifachzusammenhängender Bereiche, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, **25** (1943), 1—42.
2. Г. М. Голузин, Решение основных плоских задач математической физики для случая уравнения Лапласа и многосвязных областей, ограниченных окружностями (метод функциональных уравнений), Мат. сб., **41** (1934), 246—276.