

Н. В. ПОПОВА

**ОБ ИНТЕГРАЛАХ НЕКОТОРОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
УРАВНЕНИЯ, ОТОБРАЖАЮЩИХ ПОЛУПЛОСКОСТЬ НА ОБЛАСТЬ,
ГРАНИЦА КОТОРОЙ СОСТОИТ ИЗ ОТРЕЗКОВ ПРЯМЫХ**

(Представлено академиком М. В. Келдышем 3 VI 1953)

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial f(z, t)}{\partial t} + P(z, t) \frac{\partial f(z, t)}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

где z — комплексное переменное, t — действительное и

$$P(z, t) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{z - \lambda_i(t)}. \quad (2)$$

Здесь A_i — постоянные, а $\lambda_i(t)$ — действительные непрерывно дифференцируемые функции.

Для случая, когда

$$P(z, t) = z \frac{z + \mu(t)}{z - \mu(t)}, \quad |\mu(t)| = 1,$$

т. е. функция $P(z, t)$ имеет один простой полюс на окружности единичного круга, П. П. Куфаревым ⁽¹⁾ доказано, что при определенном выборе функции $\mu(t)$ среди интегралов рассматриваемого уравнения есть интегралы, отображающие единичный круг на область, граница которой состоит из отрезков прямых, и исследовано изменение этой области при изменении параметра t .

Аналогичные исследования могут быть проделаны для уравнения, когда функция $P(z, t)$ имеет вид (2).

Функция

$$w = c(t) \int_0^z \prod_{k=1}^m [z - a_k(t)]^{d_k - 1} dz \quad (3)$$

удовлетворяет уравнению (1), если выполнены следующие условия: $c(t)$ — постоянное; n из функций $a_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, m$) совпадают с функциями $\lambda_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$; $n < m$); $\alpha_i = 2$ ($i = 1, 2, \dots, n$); функции $a_k(t)$ ($k = n + 1, \dots, m$) и $\lambda_i(t) \equiv a_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) удовлетворяют системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{da_k}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{a_k - \lambda_i}, \quad k = n + 1, \dots, m;$$

$$\frac{d\lambda_p}{dt} = A_p \sum_{k=n+1}^m \frac{\alpha_k - 1}{\lambda_p - a_k} + A_p \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_p - \lambda_i} + \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{\lambda_p - \lambda_i}, \quad p = 1, \dots, n.$$

Эта система имеет на некотором отрезке единственное действительное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$\begin{aligned} a_k(t) &= a_k^{(0)}, & k &= n+1, \dots, m; \\ \lambda_p(t) &= \lambda_p^{(0)}, & p &= 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

при $t = t_0$.

Обозначим через w_1, w_2, \dots, w_m вершины ломаной, являющейся границей области, на которую функция (3) отображает полуплоскость. Можно доказать, что

$$\frac{dw_k}{dt} = 0$$

для вершин, в которые не переходят при отображении полюсы функции $P(z, t)$, т. е. точки $\lambda_i(t); i = 1, 2, \dots, n$.

Справедлива теорема о том, что интегралы рассматриваемого уравнения отображают полуплоскость на семейство вложенных друг в друга областей. Отсюда следует, что если за начальную взять функцию $w = z$, то интегралы уравнения (1) отображают полуплоскость на область, принадлежащую полуплоскости, граница которой состоит из отрезков прямых. При изменении параметра на некотором отрезке только n из вершин граничной ломаной двигаются. Эти вершины являются концами прямолинейных разрезов, так как для них $\alpha_k = 2$. С увеличением t эти разрезы увеличиваются.

Белорусский политехнический институт
им. И. В. Сталина

Поступило
2 VI 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ П. П. Куфарев, Уч. зап. Томск. гос. ун-та, № 8 (1948).