Н. В. ПОПОВА,
кандидат физико-математических наук

ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ УРАВНЕНИЕМ ЛЁВНЕРА И УРАВНЕНИЕМ $\frac{dw}{dt}=\frac{1}{w-\lambda(t)}$

В работе [1] доказано, что интегралами уравнения

$$\frac{dw}{dt}=\frac{1}{w-\lambda(t)},\ \operatorname{Im}\lambda(t)=0 \tag{1}$$

можно аппроксимировать функции, однолистные в полуплоскости. В этом уравнении w—комплексное переменное, t—действительное переменное, $\lambda(t)$—действительная функция от t, которая предполагается непрерывно дифференцируемой на некотором интервале $[t_1,\ t_2]$.

Целью этой работы является установление зависимости между известным уравнением Лёвнера

$$\frac{dw}{dt}=w\frac{w+\mu(t)}{w-\mu(t)},\ |\mu(t)|=1 \tag{1}$$

и уравнением (1).

Преобразование полуплоскости в круг запишем в виде

$$w=e^{i\alpha}\frac{v-\beta}{v-\bar{\beta}}, \tag{2}$$

где $\alpha(t)$—действительное и $\beta(t)$—лежит в верхней полуплоскости. Для переменного v уравнение Лёвнера примет вид:

$$\frac{dv}{dt}=\frac{A(t)+A_1(t)v+A_2(t)v^2+A_3(t)v^3}{v-\lambda(t)}. \tag{3}$$

Пусть $\beta(t)=a(t)+ib(t)$. Подберем функции $\alpha(t)$, $a(t)$ и $b(t)$ так, чтобы в числителе выражения (3) пропали члены, содержащие v, v^2 и v^3.

Из уравнений $A_1(t)=0$, $A_2(t)=0$, $A_3(t)=0$ определяем $\alpha(t)$, $a(t)$ и $b(t)$. В результате $\alpha(t)$ определяется из уравнения

$$i\frac{d\alpha}{dt}=\frac{e^{i\alpha}+\mu}{e^{i\alpha}-\mu}.$$

Если положить

$$e^{i\alpha}=z,$$

то z определяется из уравнения

$$\frac{d\ln z}{dt}=\frac{z+\mu}{z-\mu},$$

т. е. z является интегралом уравнения Лёвнера, по модулю, равным единице.

Функция $b(t)$ определяется из уравнения

$$\frac{db}{dt} = -\frac{2be^{i\alpha}}{(e^{i\alpha}-\mu)^2}$$

и $a(t)$—из уравнения

$$\frac{da}{dt} = -\frac{d\alpha}{dt}\cdot\frac{db}{dt}.$$

При таком специальном выборе функций $\alpha(t)$, $a(t)$ и $b(t)$ преобразованное уравнение (3) примет вид:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{A(t)}{v-\lambda(t)}, \tag{4}$$

где

$$A(t) = -2\left(\frac{db}{dt}\right)^2 \tag{5}$$

и

$$\lambda(t) = a - b\,\frac{d\alpha}{dt}. \tag{6}$$

Из равенств (5) и (6) видно, что $A(t)$ является действительной отрицательной функцией от t, а $\lambda(t)$—действительной функцией.

При соответствующем выборе параметра t можно уравнение (4) привести к виду (1), т. е. написать

$$\frac{dv}{dt_1} = \frac{1}{v-\lambda(t_1)}. \tag{7}$$

Действительно, если в качестве параметра t_1 возьмем функцию

$$-2\int\left(\frac{db}{dt}\right)^2 dt,$$

то получим уравнение (7).

Заметим, что t_1 является монотонно убывающей функцией параметра t. Поэтому многие свойства интегралов уравнения Лёвнера, справедливые при увеличении параметра t, будут справедливы для уравнения (7) при уменьшении параметра t_1.

Мы доказали таким образом, что при определенном выборе параметра t и преобразования (2) можно из уравнения Лёвнера получить уравнение (1). Этого и следовало ожидать, так как интегралы уравнения Лёвнера обладают такими же свойствами в круге, какие имеют интегралы уравнения (1) в полуплоскости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попова Н. В. Исследование некоторых интегралов уравнения $\frac{dw}{dt} = \frac{A}{w-\lambda}$. Ученые записки Новосибирского государственного педагогического института, вып. 8, 1949.
2. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного, 1952.
3. Куфарев П. П. Об одной системе дифференциальных уравнений. Ученые записки Томского государственного университета № 8, 1948.
4. Попова Н. В. Об интегралах некоторого дифференциального уравнения, отображающих полуплоскость на область, граница которой состоит из отрезков прямых. ДАН СССР, т. 91, № 4, 1953.