УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. В. КУЙБЫШЕВА

№ 25 1955

М. Р. Куваев и П. П. Куфарев

ОБ УРАВНЕНИИ ТИПА ЛЕВНЕРА ДЛЯ МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

П. 1. В исследованиях по теории однолистных функций получил широкое применение для решения различного рода экстремальных задач так называемый метод параметрического представления, основанный на использовании известного уравнения Лёвнера. До сих пор этот метод применялся в основном при исследовании конформных отображений односвязных областей. Однако, в последние годы начали появляться работы, направленные на распространение метода на более общий случай конформного отображения многосвязных областей. У. Комацу [1] и затем другим методом Г. М. Голузин [2] получили обобщенное уравнение Лёвнера для двусвязных областей. Позднее У. Комацу [3] [1]) обобщил уравнение Лёвнера для случая взаимно-однозначного отображения многосвязной области произвольной связности. Ли-Ен-Пир [4] продолжил изучение обобщенного уравнения Лёвнера для двусвязных областей и дал при помощи этого уравнения решение некоторых экстремальных задач.

Данная работа посвящена также вопросу об обобщении уравнения Лёвнера на случай многосвязных областей. В ней выводится уравнение, типа уравнения Лёвнера, для функции, отображающей круг на однопараметрическое семейство однолистных многосвязных областей, получаемых из „начальной“ многосвязной области проведением разреза по дуге Жордана [2]).

П. 2. Пусть B_0—некоторая содержащая $z=0$ $p+1$—связная однолистная область плоскости z, ограниченная кривыми $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots \Gamma_p$, образы которых на сфере Римана являются жордановыми кривыми, и C—жорданова дуга:

$$z=\varphi(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1 \tag{1}$$

все точки которой, за исключением принадлежащей Γ_0 точки $z=\varphi(t_0)$, лежат в B_0. Обозначим через

$$z=\Phi(w,t),\ \Phi(0,t)=0,\ \Phi'_w(0,t)>0, \tag{2}$$

1) С работами У. Комацу мы имели пока возможность познакомиться только по реферативному журналу.

2) Не представляет труда обобщить результат работы на случай нескольких разрезов.

функцию, конформно отображающую круг $|w|<1$ на область $B(t)$, получаемую из B_0 проведением разреза по части

$$C(t):\ z=\varphi(x),\ t_0\leqslant x\leqslant t \tag{3}$$

кривой C.

Задача работы состоит в выводе некоторого дифференциального уравнения для функции $\Phi(w,t)$.

§ 2. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ОТОБРАЖАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ ПО ПАРАМЕТРУ

Приступая к выводу дифференциального уравнения для функции $\Phi(w,t)$, остановимся прежде всего на вопросе о непрерывности $\Phi(w,t)$ (по t) и некоторых других связанных с ней функций.

П. 1. Известно, что функция $\Phi(w,t)$ автоморфна относительно некоторой группы $\mathfrak{a}_t$ дробно-линейных преобразований S^t_n круга $|w|<1$ в себя, порожденной конечным числом преобразований $T_1, T_2, \ldots T_p$ гиперболического или параболического типа, и, следовательно, содержащей счетное число преобразований. Эта группа является фуксовой группой второго рода.

Положим, что преобразование T_k $(k=1,2,\ldots p)$ имеет вид:

$$T_k w = e^{i\varphi_k(t)}\,\frac{w-c_k(t)}{1-\overline{c_k(t)}w}. \tag{4}$$

Произвольное преобразование S^t_n группы $\mathfrak{a}_t$ можно также представить в форме:

$$S^t_n w = e^{i\beta_n(t)}\,\frac{w-\alpha_n(t)}{1-\overline{\alpha_n(t)}w}. \tag{5}$$

Функция $w=F(z,t)$, обратная $z=\Phi(w,t)$, взаимно-однозначно и конформно отображает поверхность наложения $\mathfrak{L}(t)$ области $B(t)$ на $|w|<1$. При $\tau\to t$ поверхности $\mathfrak{L}(\tau)$ сходятся к $\mathfrak{L}(t)$ как к ядру [5]. Поэтому, по теореме Каратеодори, функция $z=\Phi(w,t)$ непрерывна по t при $|w|<1$, $F(z,t)$ непрерывна по t при $z\in\mathfrak{L}(t)$.

Различные ветви функции $F(z,t)$ переводят точку $z=0$ в точки $w=S^t_n(0)=-e^{i\beta_n(t)}\alpha_n(t)$ или $w=(S^t_n)^{-1}(0)=\alpha_n(t)$ (множества точек $\{\alpha_n(t)\}$ и $\{-e^{i\beta_n(t)}\alpha_n(t)\}$ совпадают). Отсюда и из непрерывности $F(z,t)$ на $\mathfrak{L}(t)$ следует, что функции $\alpha_n(t)$ и $\beta_n(t)$ непрерывны. В частности, параметры $c_k(t)$, $\varphi_k(t)$ порождающих преобразований T_k группы $\mathfrak{a}_t$ непрерывны по t.

Изометрическая окружность преобразования S^t_n (18)

$$\left|w-\frac{1}{\overline{\alpha_n(t)}}\right|=\sqrt{|\alpha_n(t)|^{-2}-1} \tag{6}$$

имеет радиус

$$r_n(t)=\sqrt{|\alpha_n(t)|^{-2}-1} \tag{7}$$

и центр с аффиксом $\overline{\alpha_n(t)}^{-1}$. Отсюда видно, что радиусы и центры изометрических окружностей преобразований S^t_n также являются непрерывными функциями t.

П. 2. При отображении $w=F(z,t)$ поверхности наложения $\mathfrak{L}(t)$ на $|w|<1$ каждой граничной дуге (точке) области $B(t)$ ставится в соответствие счетное множество непересекающихся дуг (точек) окружности[1]), которые переходят друг в друга при преобразованиях

[1]) Исключение составляет случай двусвязной области, получаемой из односвязной выкалыванием одной точки, которой соответствует на $|w|=1$ одна точка.

группы $\mathfrak{a}_t$. Аналогично, дуге $C(t,\tau)=C(\tau)-C(t)$ (внутренней для $B(t)$) ставится в соответствие счетное множество жордановых дуг $\{l_n(t,\tau)\}$ ($n=0,1,2,\ldots$, нумерация выбирается произвольно) круга $|w|<1$. Располагающиеся на $|w|=1$ концы этих дуг, иначе говоря, точки, соответствующие при отображении $|w|<1$ на $B(t)$ концу $z=\varphi(t)$ разреза $C(t)$, обозначим через $\mu_n(t)$. При любом преобразовании группы $\mathfrak{a}_t$ каждая из этих дуг переходит в другую, так что всё множество дуг $\{l_n(t,\tau)\}$ переходит в себя. Таким же свойством обладает множество точек $\mu_n(t)$. При соответствующей нумерации преобразований S^t_n будем иметь:

$$S^t_n(l_0(t,\tau))=l_n(t,\tau)$$

и аналогично

$$\mu_n(t)=S^t_n\,\mu_0(t)=e^{i\beta_n(t)}\,\frac{\mu_0(t)-\alpha_n(t)}{1-\overline{\alpha_n(t)}\,\mu_0(t)}. \tag{8}$$

П. 3. Функция $w=F(z,t)$ взаимно-однозначно и конформно отображает поверхность наложения $\mathfrak{L}(t)$ области $B(t)$ на односвязную область $G(t,\tau)$, получаемую из $|w|<1$ проведением счетной системы разрезов по дугам $l_n(t,\tau)$.

Введем в рассмотрение функцию

$$w=f(u,t,\tau),\ f(0,t,\tau)=0,\ f'_u(0,t,\tau)>0, \tag{9}$$

конформно отображающую круг $|u|<1$ на область $G(t,\tau)$.

Очевидно

$$\Phi(u,\tau)=\Phi(f(u,t,\tau),t). \tag{10}$$

Но по лемме Шварца

$$f'_u(0,t,\tau)<1,$$

поэтому

$$\Phi'_w(0,\tau)<\Phi'_w(0,t).$$

Итак, $\Phi'_w(0,t)$ является строго монотонно убывающей функцией. С другой стороны, из непрерывности $\Phi(w,t)$ относительно t при $|w|<1$ следует, что функция $\Phi'_w(0,t)$ непрерывна.

Это дает возможность перейти, если это необходимо, от параметра t к новому параметру $t'=-\log\,\Phi'_w(0,t)$, монотонно и непрерывно изменяющемуся вместе с t.

В дальнейшем изложении мы будем считать, что параметр t выбран указанным образом, так что имеет место соотношение:

$$\Phi'_w(0,t)=e^{-t} \tag{11}$$

(по существу дальнейшие выводы остаются в силе и при произвольном выборе параметра t).

П. 4. Функция $u=\psi(w,t,\tau)$, обратная $f(u,t,\tau)$, каждому разрезу по дуге $l_n(t,\tau)$ области $G(t,\tau)$ ставит в соответствие дугу $\gamma_n(t,\tau)$ окружности $|u|=1$; при этом лежащие в $|w|<1$ концы разрезов переходят в точки $\mu_n(\tau)$, $\mu_n(\tau)\in\gamma_n(t,\tau)$. Так как при отображении $|u|<1$ на область $B(\tau)$ совокупности $\{\gamma_n(t,\tau)\}$ соответствует дуга $C(t,\tau)$ кривой C, то при преобразованиях группы $\mathfrak{a}_t$ дуги $\gamma_n(t,\tau)$ переходят друг в друга, так что все множество их переходит в себя.

Из непрерывности отображающих функций $z=\Phi(w,t)$ и $z=\Phi(w,\tau)$ соответственно на дугах $l_n(t,\tau)$ и $\gamma_n(t,\tau)$ следует что при t фиксированном и $\tau\to t$ дуги $l_n(t,\tau)$ стягиваются в точки $\mu_n(t)$, а при фиксированном τ и $t\to\tau$ дуги $\gamma_n(t,\tau)$ стягиваются в точки $\mu_n(\tau)$. Покажем, что при любом из указанных предельных переходов дуги $l_n(t,\tau)$ и $\gamma_n(t,\tau)$ одновременно стягиваются в точки $\mu_n(t)$ или $\mu_n(\tau)$.

П. 5. Рассмотрим для определенности случай $t \to \tau (\tau > t)$. Из (10) следует, что функция $f(u,t,\tau)$ может быть представлена в виде:

$$f(u,t,\tau) = F(\Phi(u,\tau),t). \tag{12}$$

Так как $\Phi(u,\tau)$ непрерывна по τ при $|u|<1$, а $F(z,t)$ непрерывна по t при $z \in L(\tau)$, то, очевидно, $f(u,t,\tau)$ непрерывна по t и τ при $|u|<1$, по теореме Витали и равномерно непрерывна внутри $|u|<1$ и при $\tau \to t$ или $t \to \tau$ стремится к u. Далее, $f(u,t,\tau)$ аналитически продолжаема через дуги $\sigma_n(t,\tau)$ окружности $|u|=1$, дополнительные к множеству $E(t,\tau)$ дуг $\gamma_n(t,\tau)$ и их предельных точек, так как она принимает на этих дугах значения, по модулю равные единице. По принципу симметрии следует, что (при продолжении через любую из этих дуг) она принимает в точках, симметричных относительно $|u|=1$ значения, симметричные относительно $|w|=1$. Таким образом, $f(u,t,\tau)$ однозначна и однолистна в области $D(t,\tau)$, получаемой из плоскости u удалением множества $E(t,\tau)$, и отображает ее на область $P(t,\tau)$, получаемую из плоскости w удалением множества дуг $L_n(t,\tau) = l_n(t,\tau) + l^*_n(t,\tau)$ (где $l^*_n(t,\tau)$—дуга, симметричная с $l_n(t,\tau)$ относительно $|w|=1$) и их предельных точек. Дуге $\gamma_n(t,\tau)$ соответствует при этом отображении дуга $L_n(t,\tau)$; $u=\infty$ переходит в $w=\infty$.

Пусть теперь $t \to \tau$. Тогда дуги $\gamma_n(t,\tau)$ стягиваются к точкам $\mu_n(\tau)$. Обозначим через $D(\tau,\tau)$ область, получаемую из плоскости u удалением замыкания $E(\tau,\tau)$ множества точек $\mu_n(\tau)$.

Из (11) и (10) следует, что

$$f'_u(0,t,\tau) = e^{t-\tau}.$$

Отсюда и из однолистности $f(u,t,\tau)$ в $|u|<1$ следует известная оценка [5]

$$|f(u,t,\tau)| \geqslant e^{t-\tau} \frac{|u|}{(1+|u|)^2}.$$

Кроме того, $|f(u,t,\tau)| < 1$ в $|u|<1$.

Так как продолжение $f(u,t,\tau)$ в $|u|>1$ осуществляется по принципу симметрии, то из только что приведенных оценок вытекает, что $f(u,t,\tau)$ равномерно (относительно t и τ) ограничена во всякой замкнутой области, не содержащей бесконечности и целиком лежащей в $D(\tau,\tau)$. Но в $|u|<1$

$$\lim_{t \to \tau} f(u,t,\tau) = u,$$

отсюда вновь по теореме Витали следует, что $f(u,t,\tau)$ равномерно внутри $D(\tau,\tau)$ сходится к u.

Обозначим теперь через $R(t)$ основную фундаментальную область группы $\mathfrak{a}_t$, то есть множество всех точек плоскости w, лежащих вне всех изометрических окружностей преобразований S^t_n группы $\mathfrak{a}_t$. Пусть $l_0(t,\tau)$—один из разрезов $l_n(t,\tau)$, имеющих общие точки с $R(t)$.

Дуга, соответствующая $l_0(t,\tau)$ при отображении $w=f(u,t,\tau)$ (уже обозначенная нами через $\gamma_0(t,\tau)$), стягивается при $t \to \tau$ к $\mu_0(\tau)$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и построим ортогональную к $|u|=1$, содержащую на своем диаметре точку $\mu_0(\tau)$ окружность K_ε радиуса не больше $\frac{\varepsilon}{4}$ и такую, что внутри и на ней не содержится других точек $E(\tau,\tau)$. Таким образом, K_ε будет принадлежать $D(\tau,\tau)$. Поэтому при всех t, достаточно близких к τ, во-первых, дуга $\gamma_0(t,\tau)$ будет лежать внутри K_ε и, во-вторых, на K_ε будет выполняться неравенство:

$$|f(u,t,\tau) - u| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

С другой стороны, очевидно

$$|u - \mu_0(\tau)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

на K_ε и, следовательно,

$$|f(u,t,\tau) - \mu_0(\tau)| < \varepsilon. \tag{14}$$

Но функция $f(u,t,\tau)$ однолистна в $D(\tau,\tau)$. Окружность K_ε, содержащая внутри себя дугу $\gamma_0(t,\tau)$, переходит при отображении $w=f(u,t,\tau)$ в замкнутую кривую L_ε, содержащую внутри себя дугу $L_0(t,\tau)$. Неравенство (14) показывает, что кривая L_ε лежит в ε—окрестности точки $w=\mu_0(\tau)$. Следовательно, и вся область, лежащая внутри этой кривой, и тем более дуга $l_0(t,\tau)$, лежит в ε—окрестности точки $\mu_0(\tau)$. Отсюда, в силу произвольности ε, следует, что при $t \to \tau$ дуга $l_0(t,\tau)$ стягивается в точку $\mu_0(\tau)$. В частности, так как $\mu_0(t) \in l_0(t,\tau)$

$$\lim_{t \to \tau} \mu_0(t) = \mu_0(\tau).$$

Аналогично устанавливается, что и для любого n дуга $l_n(t,\tau)$ стягивается к $\mu_n(\tau)$ при $t \to \tau$ и

$$\lim_{t \to \tau} \mu_n(t) = \mu_n(\tau).$$

Для дальнейшего существенно доказать, что стягивание дуг $l_n(t,\tau)$ к $\mu_n(\tau)$ происходит равномерно относительно n.

Действительно, дуга $l_0(t,\tau)$ имеет по предположению точки в $R_0(t)$, где через $R_0(t)$ обозначена часть области $R(t)$, полностью лежащая в $|w|<1$. Следовательно, ограниченная аналитической кривой L_ε область g_ε, содержащая $l_0(t,\tau)$, также пересекается с $R_0(t)$. Все точки g_ε находятся от $\mu_0(\tau)$ на расстоянии не превышающем ε. Так как радиусы и центры изометрических окружностей преобразований S^t_n группы $\mathfrak{a}_t$, следовательно, и фундаментальные области группы $\mathfrak{a}_t$ меняются непрерывно с изменением t, то g_ε при достаточно малом ε (и $|t-\tau|$) будет пересекаться не более чем с двумя фундаментальными областями—областью $\overline{R_0(t)}$ и одной из соседних областей. Если g_ε лежит в $\overline{R_0(t)}$, то при любом из преобразований S^t_n группы она будет отображаться в область $g^{(n)}_\varepsilon$, лежащую внутри соответствующей изометрической окружности. При этом, как известно [6], расстояния между точками могут только уменьшаться, следовательно, дуга $l_n(t,\tau)$, принадлежащая $g^{(n)}_\varepsilon$, будет находиться (при достаточно близких к τ значениях t) также в ε—окрестности образа $\mu_n(\tau)$ точки $\mu_0(\tau)$. Если же g_ε принадлежит двум фундаментальным областям, то при отображении преобразованием S^t_n той части g_ε, которая лежит в $R_0(t)$, длины попрежнему не увеличиваются. Далее, отображение S^t_n части g_ε, лежащей в соседней с $R_0(t)$ фундаментальной области $R_1(t)$, можно осуществить, переводя сначала $R_1(t)$ в $R_0(t)$ фиксированным преобразованием T_1 и затем отображая $R_0(t)$ в некоторую другую фундаментальную область $R_n(t)$ преобразованием

$$S = S^t_n T_1^{-1}.$$

При втором преобразовании длины не увеличиваются. При первом же преобразовании длины линейных элементов могут увеличиваться только в определенном, в силу непрерывности преобразования T_1 равномерно относительно t ограниченном, отношении. Таким образом, в этом случае $l_n(t,\tau)$ окажется максимум в $k\varepsilon$—окрестности точки $\mu_n(t)$, где k—фиксированное число.

Совершенно аналогично можно показать, вводя в рассмотрение наряду с $w=f(u,t,\tau)$ функцию $u=\psi(w,t,\tau)$, обратную ей, что при $\tau\to t$ дуги $\gamma_n(t,\tau)$ равномерно относительно n стягиваются к $\mu_n(t)$, и в частности $\mu_n(\tau)\to\mu_n(t)$ равномерно относительно n.

Из предыдущего следует также что функции $\mu_n(t)$ равностепенно непрерывны в каждой точке $t\subset[t_0,t_1]$.

П. 6. Функция $f(u,t,\tau)$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$S_n^t f((S_n^\tau)^{-1}u,t,\tau)=f(u,t,\tau),\quad n=1,2,\ldots \tag{15}$$

Действительно, преобразование $(S_n^\tau)^{-1}u$ круга $|u|<1$ в себя переводит дугу $\gamma_n(t,\tau)$ в $\gamma_0(t,\tau)$, которой функция $w=f(u,t,\tau)$, отображая $|u|<1$ на область $G(t,\tau)$, ставит в соответствие разрез по дуге $l_0(t,\tau)$, и, наконец, преобразование S_n^t круга $|w|<1$ в себя переводит разрез по $l_0(t,\tau)$ в разрез по $l_n(t,\tau)$. Таким образом, функции $S_n^\tau f((S_n^\tau)^{-1}u,t,\tau)$ и $f(u,t,\tau)$ осуществляя отображение $|u|<1$ на одну и ту же область $G(t,\tau)$, переводят дугу $\gamma_n(t,\tau)$ в одну и ту же дугу $l_n(t,\tau)$, следовательно, они тождественны.

П. 7. В заключение данного параграфа установим еще следующее предложение:

Фиксируем значение t. При достаточно малых $|\tau-t|$ справедлива оценка:

$$|\mu_0(\tau)-\alpha_n(\tau)|\geqslant q(t)>0, \tag{16}$$

где $q(t)$—некоторая, не зависящая от n, величина.

Доказательство. По условию (см. выше) $\mu_0(\tau)$ принадлежит $R_0(\tau)$. Область $R(\tau)$ ограничена конечным числом изометрических окружностей, именно, изометрическими окружностями порождающих преобразований группы и им обратных преобразований. Можно принять, что преобразования $T_1,\ldots T_p$, о которых говорилось в п. 1, есть именно эти порождающие преобразования. Если среди $T_1\ldots T_p$ есть параболические преобразования, то граница области $R_0(\tau)$ содержит конечное число предельных точек группы $\mathfrak{a}_\tau$, именно, неподвижные точки этих параболических преобразований. Но $\mu_0(\tau)$ не является предельной точкой группы, следовательно, отлична от этих точек и принадлежит одной из входящих в границу области $R_0(\tau)$ дуг окружности $|u|=1$, которые не содержат предельных точек группы. Обозначим эту дугу через $\gamma(\tau)$, а концы ее через $e^{i\varkappa_1(\tau)}$, $e^{i\varkappa_2(\tau)}$, $\varkappa_1<\varkappa_2$.

Пусть $l_1(\tau)$, $l_2(\tau)$—граничные для $R_0(\tau)$ изометрические окружности, проходящие через концы дуги $\gamma(\tau)$ и $R_1(\tau)$, $R_2(\tau)$—фундаментальные области, примыкающие к $R_0(\tau)$ вдоль окружностей $l_1(\tau)$ и $l_2(\tau)$, а T_1, T_2—те из порождающих преобразований (или обратных им), которые переводят $R(\tau)$ соответственно в $R_1(\tau)$ и $R_2(\tau)$. Области $R_1(\tau)$ и $R_2(\tau)$ содержат дуги $\gamma_1(\tau)$ и $\gamma_2(\tau)$ окружности $|u|=1$, прилегающие к $\gamma(\tau)$. Обозначим середины этих дуг через $e^{i\lambda_1(\tau)}$, $e^{i\lambda_2(\tau)}$.

Покажем, что сектор

$$\lambda_1<\arg u<\lambda_2$$

не содержит центров $[\overline{\alpha_n(\tau)}]^{-1}$ изометрических окружностей преобразований S_n^τ группы $\mathfrak{a}_\tau$.

Действительно, сектор

$$\varkappa_1\leqslant\arg u\leqslant\varkappa_2$$

не содержит центров изометрических окружностей, так как он принадлежит $R(\tau)$ и, следовательно, по определению основной фундаментальной области, лежит вне всех изометрических окружностей. Далее, если бы, например, сектор

$$\lambda_1<\arg u<\varkappa_1$$

содержал центр некоторой изометрической окружности C, то эта окружность целиком принадлежала бы $R_1(\tau)$, ибо в противном случае она пересекалась бы с $l_1(\tau)$ и имела бы точки $R(\tau)$, что невозможно по определению $R(\tau)$. Так как внутри всякой изометрической окружности находятся фундаментальные области группы, то в таком случае собственная часть фундаментальной области $R_1(\tau)$ являлась бы так же фундаментальной областью, что противоречит определению фундаментальной области.

Вместе с точками $[\overline{\alpha_n(\tau)}]^{-1}$ сектору $\lambda_1<\arg u<\lambda_2$ не принадлежат и точки $\alpha_n(\tau)$. Отсюда следует, что расстояние точки $\mu_0(\tau)$, принадлежащей $\gamma(\tau)$, от любой из точек $\alpha_n(\tau)$ не меньше наименьшей из величин

$$\sin\frac{1}{2}|\lambda_1-\varkappa_1|,\quad \sin\frac{1}{2}|\lambda_2-\varkappa_2|:$$

$$|\mu_0(\tau)-\alpha_n(\tau)|\geqslant k(\tau),$$

$$k(\tau)=\min\left\{\sin\frac{1}{2}|\lambda_1-\varkappa_1|,\quad \sin\frac{1}{2}|\lambda_2-\varkappa_2|\right\}.$$

Но радиусы и центры изометрических окружностей непрерывно меняются с изменением τ; преобразования T_1, T_2 также непрерывным образом зависят от τ; отсюда следует, что функция $k(\tau)$ является непрерывной положительной функцией τ. Поэтому, для достаточно малого ε и при $|\tau-t|<\varepsilon$ имеет место для всех n неравенство

$$|\mu_0(\tau)-\alpha_n(\tau)|\geqslant q(t)=\min_{|\tau-t|<\varepsilon}k(\tau),$$

что и требовалось доказать.

§ 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИИ $\Phi(w,t)$.

П. 1. Основываясь на результатах предыдущего параграфа, выведем дифференциальное уравнение для функции $\Phi(w,t)$.

Рассмотрим выражение

$$I_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n(t,\tau)}\log|f(u,t,\tau)|\frac{du}{u}. \tag{17}$$

На основании соотношения (15) его можно записать еще и так:

$$I_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n}\log|S^t_n f((S^\tau_n)^{-1}u,t,\tau)|\frac{du}{u}. \tag{18}$$

Производя в последнем интеграле замену переменных по формуле

$$u=S^\tau_n v=e^{i\beta_n(\tau)}\frac{v-\alpha_n(\tau)}{1-\overline{\alpha_n(\tau)}v}$$

и учитывая, что дуга $\gamma_n(t,\tau)$ при этом преобразовании переходит в $\gamma_0(t,\tau)$, и что на дуге $\gamma_0(t,\tau)$, $\bar v = v^{-1}$, из соотношений (18) и (19) получим:

$$I_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0} \log\left|\frac{f(v,t,\tau)-\alpha_n(t)}{1-\overline{\alpha_n(t)}f(v,t,\tau)}\right| \cdot \frac{1-|\alpha_n(\tau)|^2}{|v-\alpha_n(\tau)|^2}\,\frac{dv}{v}. \qquad (20)$$

Но, как было доказано выше, при $\tau\to t$ (или $t\to\tau$) дуги $l_n(t,\tau)$ равномерно относительно n стягиваются к точкам $\mu_n(t)$ (или $\mu_n(\tau)$). Если $f\subset l_0(t,\tau)$, то

$$e^{i\beta_n(t)}\frac{f-\alpha_n(t)}{1-\overline{\alpha_n(t)}f}\subset l_n(t,\tau).$$

Следовательно, каково бы ни было $\varepsilon>0$, при достаточно малых $\tau-t$ имеем на $\gamma_0(t,\tau)$

$$1-|f|^2<\varepsilon,\quad 1-\left|\frac{f-\alpha_n(t)}{1-\overline{\alpha_n(t)}f}\right|^2<\varepsilon$$

при всех значениях n.

Поэтому

$$\frac{\log\left|\frac{f-\alpha_n(t)}{1-\overline{\alpha_n(t)}f}\right|^2}{\log|f|^2}=\frac{1-\left|\frac{f-\alpha_n(t)}{1-\overline{\alpha_n(t)}f}\right|^2}{1-|f|^2}\cdot\frac{\log\left|\frac{f-\alpha_n(t)}{1-\overline{\alpha_n(t)}f}\right|^2}{1-\left|\frac{f-\alpha_n(t)}{1-\overline{\alpha_n(t)}f}\right|^2}\cdot$$

$$\cdot\frac{1-|f|^2}{\log|f|^2}=\frac{1-\left|\frac{f-\alpha_n(t)}{1-\overline{\alpha_n(t)}f}\right|^2}{1-|f|^2}\,g_n(v,t,\tau), \qquad (21)$$

где $g_n(v,t,\tau)$ — вещественные функции, равномерно относительно n стремящиеся к единице при $\tau\to t\ (t\to\tau)$; то есть, имеют место неравенства

$$|1-g_n(v,t,\tau)|<\varepsilon \quad \text{при} \quad \tau-t<\delta(\varepsilon)\quad (n=1,2,3,\dots)$$

Но

$$\frac{1-\left|\frac{f-\alpha_n}{1-\bar\alpha_n f}\right|^2}{1-|f|^2}=\frac{1-|\alpha_n|^2}{|1-\bar\alpha_n f|^2}.$$

Отсюда и из (21) следует, что

$$\log\left|\frac{f(v,t,\tau)-\alpha_n(t)}{1-\overline{\alpha_n(t)}f(v,t_1\tau)}\right| = \frac{1-|\alpha_n(t)|^2}{|1-\overline{\alpha_n(t)}f(v,t,\tau)|^2}\cdot$$

$$\cdot g_n(v,t,\tau)\cdot\log|f,t,\tau)| \qquad (22)$$

Подставляя это выражение в (20), имеем:

$$I_n=\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_0}\frac{1-|\alpha_n(\tau)|^2}{|e^{i\varphi}-\alpha_n(\tau)|^2}\cdot\frac{1-|\alpha_n(t)|^2}{|1-\overline{\alpha_n(t)}f(e^{i\varphi},t,\tau)|^2}\cdot$$

$$\cdot g_n(e^{i\varphi},t,\tau)\log|f(e^{i\varphi},t,\tau)|\,d\varphi.$$

Применяя к интегралу обобщенную теорему о среднем и переходя затем обратно к переменной v, получаем:

$$I_n=\frac{1-|\alpha_n(\tau)|^2}{|v_n-\alpha_n(\tau)|^2}\cdot\frac{1-|\alpha_n(\tau)|^2}{|1-\overline{\alpha_n(t)}f(v_n,t,\tau)|^2}\cdot$$

$$\cdot g_n(v_n,t,\tau)\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0}\log|f(v,t,\tau)|\,\frac{dv}{v}, \qquad (23)$$

где v_n — некоторая точка на $\gamma_0(t,\tau)$.

Введем в рассмотрение величины

$$\Delta_n(t,\tau)=\frac{I_n}{\log f'_n(0,t,\tau)}. \qquad (24)$$

Из (24) и (23) получается:

$$\frac{\Delta_n(t,\tau)}{\Delta_0(t,\tau)}=\frac{1-|\alpha_n(\tau)|^2}{|v_n-\alpha_n(\tau)|^2}\cdot\frac{1-|\alpha_n(t)|^2}{|1-\overline{\alpha_n(t)}f(v_n,t,\tau)|^2}\,g_n(v_n,t,\tau).$$

Отсюда следует, что предел $\Delta_n:\Delta_0$ при $\tau\to t$ $(t\to\tau)$ существует и равен:

$$\lim_{\tau\to t}\frac{\Delta_n(t,\tau)}{\Delta_0(t,\tau)}=\frac{(1-|\alpha_n(t)|^2)^2}{|\mu_0(t)-\alpha_n(t)|^4}. \qquad (25)$$

Для определенности в дальнейшем ограничимся случаем $\tau\to t$; для второго случая $(t\to\tau)$ рассуждения аналогичны.

Покажем, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Delta_n(t,\tau)}{\Delta_0(t,\tau)} \qquad (26)$$

равномерно относительно τ сходится.

Действительно, так как дуга $\gamma_0(t,\tau)$ при $\tau\to t$ стягивается в точку $\mu_0(t)$ и так как функция $\mu_0(t)$ непрерывна, то при достаточно малых $\tau-t$ для точек v_n, принадлежащих $\gamma_0(t,\tau)$, будет выполняться неравенство

$$|v_n-\mu_0|<\varepsilon.$$

Отсюда и из неравенства (16) следует, что разности $|v_n-\alpha_n(\tau)|$ будут при достаточно малом ε равномерно ограничены снизу:

$$|v_n-\alpha_n(\tau)|>\frac{1}{2}q \qquad (27)$$

для всех n.

Аналогично докажем, что

$$|1-\overline{\alpha_n(t)}f(v_n,t,\tau)|=|f|\left|\frac{1}{\bar f}-\alpha_n\right|>\frac{1}{2}q.$$

Отсюда и из (23), (27) следует оценка

$$\sum_{n=m}^{\infty}\frac{\Delta_n(t,\tau)}{\Delta_0(t,\tau)}<\frac{8}{q^2}\sum_{n=m}^{\infty}[1-|\alpha_n(t)|^2].$$

Далее, из (7) имеем:

$$1-|\alpha_n(t)|^2=\frac{r^2_n(t)}{1+r^2_n(t)}<r^2_n(t).$$

Следовательно,

$$\sum_{n=m}^{\infty}\frac{\Delta_n(t,\tau)}{\Delta_0(t,\tau)}<\frac{8}{q^2}\sum_{n=m}^{\infty}r^2_n(t).$$

Но для фуксовой группы второго рода ряд квадратов радиусов изометрических окружностей сходится [6]. Поэтому ряд (26) равномерно относительно τ сходится.

2. Заметим теперь, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Delta_n(t,\tau)=1. \tag{28}$$

В самом деле, по формуле Пуассона

$$\log f'_u(0,t,\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|\frac{f(e^{i\varphi},t,\tau)}{e^{i\varphi}}\right|d\varphi$$

или, так как на множестве дуг окружности $|u|=1$, дополнительных к $U\gamma_n(t,\tau)$, $|f(u,t,\tau)|=1$

$$\log f'_u(0,t,\tau)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\gamma\to n}\log|f(u,t,\tau)|\frac{du}{u}=\sum_{n=0}^{\infty}I_n.$$

Из последнего равенства и из (24) следует (28). Но в таком случае

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Delta_n(t,\tau)}{\Delta_0(t,\tau)}=\frac{1}{\Delta_0(t,\tau)}.$$

Выше было доказано, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Delta_n(t,\tau)}{\Delta_0(t,\tau)}$$

сходится равномерно относительно τ и, с другой стороны, для каждого n существует предел

$$\lim_{\tau\to t}\frac{\Delta_n(t,\tau)}{\Delta_0(t,\tau)}=\frac{(1-|\alpha_n(t)|^2)^2}{|\mu_0(t)-\alpha_n(t)|^4}. \tag{29}$$

Но тогда существует и предел

$$\frac{1}{\delta_0(t)}=\lim_{\tau\to t}\frac{1}{\Delta_0(t,\tau)}=\lim_{\tau\to t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Delta_n(t,\tau)}{\Delta_0(t,\tau)}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-|\alpha_n(t)|^2)^2}{|\mu_0(t)-\alpha_n(t)|^4}. \tag{30}$$

Наконец, из равенств (29) и (30) заключаем, что для любого n существует $\lim\limits_{\tau\to t}\Delta_n(t,\tau)$ и этот предел равен:

$$\delta_n(t)=\delta_0(t)\frac{(1-|\alpha_n(t)|^2)^2}{|\mu_0(t)-\alpha_n(t)|^4}, \tag{31}$$

где

$$\delta_0(t)=\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-|\alpha_n(t)|^2)^2}{|\mu_0(t)-\alpha_n(t)|^4}\right]^{-1}. \tag{32}$$

При этом, очевидно,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n(t)=1. \tag{33}$$

П. 3. Докажем теперь существование предела

$$\lim\frac{f(u,t,\tau)-u}{\tau-t}=-u\lim_{\tau\to t}\frac{\log\dfrac{f(u,t,\tau)}{u}}{\log f'_u(0,t,\tau)}. \tag{34}$$

По формуле Шварца имеем:

$$\log\frac{f(u,t,\tau)}{u}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|v|=1}\log\left|\frac{f(v,t,\tau)}{v}\right|\frac{v+u}{v-u}\frac{dv}{v}.$$

Замечая вновь, что на множестве дуг окружности $|v|=1$, дополнительных к $U\gamma_n(t,\tau)$, $|f(v,t,\tau)|=1$, получим:

$$\log\frac{f(u,t,\tau)}{u}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\log|f(v,t,\tau)|\frac{v+u}{v-u}\frac{dv}{v}.$$

Применяя к действительной и мнимой части каждого интеграла суммы обобщенную теорему о среднем, находим:

$$\log\frac{f(u,t,\tau)}{u}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\mathrm{Re}\frac{v_n+u}{v_n-u}+i\,\mathrm{Im}\frac{v^1_n+u}{v^1_n-u}\right)I_n$$

где через v_n и v^1_n обозначены некоторые внутренние точки дуги $\gamma_n(t,\tau)$.

Деля на $\log f'_u(0,t,\tau)$ и имея в виду формулу (24), получим:

$$\frac{\log\dfrac{f(u,t,\tau)}{u}}{\log f'_u(0,t,\tau)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\mathrm{Re}\frac{v_n+u}{v_n-u}+i\,\mathrm{Im}\frac{v^1_n+u}{v^1_n-u}\right)\Delta_n(t,\tau). \tag{35}$$

Так как ряд $\Sigma\Delta_n(t,\tau)$ равномерно относительно τ сходится при $\tau\to t$, а величины

$$\mathrm{Re}\frac{v_n+u}{v_n-u},\quad \mathrm{Im}\frac{v^1_n+u}{v^1_n-u}$$

равномерно ограничены внутри $|u|<1$ и

$$\lim_{\tau\to t} \operatorname{Re} \frac{v_n+u}{v_n-u} = \operatorname{Re} \frac{\mu_n(t)+u}{\mu_n(t)-u},$$

$$\lim_{\tau\to t} \operatorname{Im} \frac{v^1_n+u}{v^1_n-u} = \operatorname{Im} \frac{\mu_n(t)+u}{\mu_n(t)-u}$$

то в равенстве (35) можно сделать предельный переход и учитывая (34), получим:

$$\lim_{\tau\to t} \frac{f(u,t,\tau)-u}{\tau-t} = -u \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n(t) \frac{\mu_n(t)+u}{\mu_n(t)-u}. \tag{36}$$

Выполняя, наконец, предельный переход в равенстве:

$$\frac{\Phi(w,\tau)-\Phi(w,t)}{\tau-t} = \frac{\Phi(f(w,t,\tau),t)-\Phi(w,t,)}{f(w,t,\tau)-w} \cdot \frac{f(w,t,\tau)-w}{\tau-t}$$

устанавливаем, что при $|w|<1$ производная $\dfrac{\partial\Phi}{\partial t}$ существует и имеет место формула:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{\partial\Phi}{\partial w} \cdot \lim_{\tau\to t} \frac{f(w,t,\tau)-w}{\tau-t}.$$

Отсюда и из (36) находим дифференциальное уравнение для $\Phi(w,t)$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + w \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n(t) \frac{\mu_n(t)+w}{\mu_n(t)-w} \frac{\partial\Phi}{\partial w} = 0. \tag{37}$$

§ 4. ВЗАИМОСВЯЗЬ ВЕЛИЧИН $\delta_n(t)$, $\mu_n(t)$

В рассуждениях предыдущего параграфа среди всех величин $\delta_n(t)$ и $\mu_n(t)$ особую роль играли $\delta_0(t)$ и $\mu_0(t)$. Однако, в силу равноправного их определения и произвольного выбора нумерации вместо пары δ_0, μ_0 можно взять любую другую пару величин δ_n, μ_n из множества $[\delta_m, \mu_m]$. Соотношения (8) и (31) при новом выборе начальной пары запишутся следующим образом:

$$\mu_m(t) = S^t_{mn}\mu_n(t) = e^{i\beta_{mn}(t)} \frac{\mu_n(t)-\alpha_{mn}(t)}{1-\overline{\alpha_{mn}(t)}\,\mu_n(t)}, \tag{38}$$

$$\delta_m(t) = \delta_n(t) \frac{(1-|\alpha_{mn}(t)|^2)^2}{|\mu_n(t)-\alpha_{mn}(t)|^4}, \tag{39}$$

где через S^t_{mn} обозначено преобразование группы $\mathfrak{a}_t$, переводящее точку $\mu_n(t)$ в $\mu_m(t)$. Очевидно, что преобразование S^t_{mn} является некоторым преобразованием S^t_k группы $\mathfrak{a}_t$ при первоначальной нумерации.

Мы сейчас покажем, что формулы (38) и (39) следуют из соответствующих формул (8) и (31); справедливо и обратное предложение.

По определению, преобразование S^t_{mn} можно представить в виде произведения двух преобразований

$$S^t_{mn} = S^t_m(S^t_n)^{-1}, \tag{40}$$

где преобразования S^t_m и S^t_n группы $\mathfrak{a}_t$ переводят точку $\mu_0(t)$ соответственно в $\mu_m(t)$ и $\mu_n(t)$.

Из формул (8), (38) и (40) имеем:

$$e^{i\beta_{mn}} = e^{i(\beta_m-\beta_n)} \frac{1-\alpha_m\bar{\alpha}_n}{1-\bar{\alpha}_m\alpha_n}, \tag{41}$$

$$\alpha_{mn} = e^{i\beta_n} \frac{\alpha_m-\alpha_n}{1-\bar{\alpha}_n\alpha_m}. \tag{42}$$

Далее, из соотношений (31) находим:

$$\delta_m = \delta_n \frac{|\mu_0-\alpha_n|^4}{(1-|\alpha_n|^2)^2} \cdot \frac{(1-|\alpha_m|^2)^2}{|\mu_0-\alpha_m|^4}. \tag{39$_1$}$$

С другой стороны, из (41), (42) после простого подсчета, получим:

$$1-|\alpha_{mn}|^2 = \frac{(1-|\alpha_n|^2)(1-|\alpha_m|^2)}{|1-\bar{\alpha}_n\alpha_m|^2}$$

и

$$\mu_n-\alpha_{mn} = e^{i\beta_n} \frac{(\mu_0-\alpha_m)(1-|\alpha_n|^2)}{\mu_0(\bar{\mu}_0-\bar{\alpha}_n)(1-\bar{\alpha}_n\alpha_m)}.$$

Подставляя последние два выражения в (39), после сокращений получаем формулу (39$_1$). Отсюда видно, что соотношение (39) следует из соотношений (8) и (31).

Обращаясь к формуле (38), имеем из (40) и (8)

$$\mu_m = S^t_m\mu_0 = S^t_m(S^t_n)^{-1}\mu_n =$$

$$= e^{i(\beta_m-\beta_n)} \frac{1-\alpha_m\bar{\alpha}_n}{1-\bar{\alpha}_m\alpha_n} \frac{\mu_n - e^{i\beta_n}\dfrac{\alpha_m-\alpha_n}{1-\bar{\alpha}_n\alpha_m}}{1-e^{-i\beta_n}\dfrac{\bar{\alpha}_m-\bar{\alpha}_n}{1-\alpha_n\bar{\alpha}_m}\mu_n},$$

откуда на основании (41) и (42) получаем формулу (38).

§ 5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ $\alpha_m(t)$ и $\beta_m(t)$

П. 1. Из инвариантности функции $\Phi(w,t)$ относительно преобразований группы $\mathfrak{a}_t$

$$\Phi(S^t_m w, t) = \Phi(w,t)$$

следуют, в частности, равенства

$$\Phi(\alpha_m(t),t) = \Phi(0,t) = 0. \tag{43}$$

Из этого соотношения и из того, что $\Phi(w,t)$ при $|w|<1$ имеет производную по t, следует, что и функция $\alpha_m(t)$ имеет производную.

Дифференцируя последнее равенство по t и приравнивая коэффициенты при соответствующих производных коэффициентам уравнения (37) при $w=\alpha_m(t)$, получим уравнение для $\alpha_m(t)$:

$$\frac{d\alpha_m}{dt}=\alpha_m\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n\,\frac{\mu_n+\alpha_m}{\mu_n-\alpha_m}. \tag{44}$$

П. 2. Из уравнений (44) легко можно получить дифференциальные уравнения и для $\beta_m(t)$. Замечая, что для преобразования

$$S_j w=(S^t_m)^{-1}w=e^{-i\beta_m}\,\frac{w+e^{i\beta_m}\alpha_m}{1+e^{-i\beta_m}\bar{\alpha}_m w}$$

роль α_j выполняет $-e^{i\beta_m}\alpha_m$, из (44) имеем:

$$\frac{d}{dt}(-e^{i\beta_m}\alpha_m)=-e^{i\beta_m}\alpha_m\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n\,\frac{\mu_n-e^{i\beta_m}\alpha_m}{\mu_n+e^{i\beta_m}\alpha_m}$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty}\delta_k\,\frac{\mu_k+\alpha_m}{\mu_k-\alpha_m}+i\,\frac{d\beta_m}{dt}=\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n\,\frac{\mu_n-e^{i\beta_m}\alpha_m}{\mu_n+e^{i\beta_m}\alpha_m}. \tag{45}$$

Пусть преобразование S^t_m переводит μ_k в μ_n.

Из соотношений (38) и (39) находим:

$$\mu_n=e^{i\beta_m}\,\frac{\mu_k-\alpha_m}{1-\bar{\alpha}_m\mu_k}, \tag{46}$$

$$\delta_n=\delta_k\,\frac{(1-|\alpha_m|^2)^2}{|\mu_k-\alpha_m|^4}. \tag{47}$$

Подставляя выражения (46) и (47) в правую часть (45) и производя элементарные преобразования, находим:

$$i\,\frac{d\beta_m}{dt}=\sum_{k=0}^{\infty}\delta_k\left\{\frac{|1-\alpha_m|^2}{|\mu_k-\alpha_m|^4}(1-2\bar{\mu}_k\alpha_m+\bar{\alpha}_m\alpha_m)-\frac{\mu_k+\alpha_m}{\mu_k-\alpha_m}\right\}. \tag{48}$$

Замечая, что, как показывает подсчет, выражение, стоящее в фигурной скобке в правой части равенства (48), равно

$$-2i\,\mathrm{Im}\,\frac{\mu^2_k}{(\mu_k-\alpha_m)^2}$$

и переходя в (48) вновь к индексу n, получим искомое дифференциальное уравнение

$$\frac{d\beta_m}{dt}=-2\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n\,\mathrm{Im}\,\frac{\mu^2_n}{(\mu_n-\alpha_m)^2}. \tag{49}$$

§ 6. ИНВАРИАНТНОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИИ $\Phi(w,t)$

Так как функция $\Phi(w,t)$ автоморфна относительно группы преобразований α_t, то естественно ожидать, что и дифференциальное уравнение (37), которому она удовлетворяет, будет инвариантным относительно преобразований той же группы. Результаты параграфов 4 и 5 дают возможность доказать это предположение непосредственно.

Пусть

$$S^t_m w=e^{i\beta_m(t)}\,\frac{w-\alpha_m(t)}{1-\bar{\alpha}_m(t)w} \tag{50}$$

произвольное преобразование группы α_t. Произведем сначала в уравнении (37) замену переменных по формулам

$$u=\frac{w-\alpha_m}{1-\bar{\alpha}_m w},\quad \Phi(w,t)=\Psi(u,t). \tag{51}$$

Имеем

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=\frac{\partial\Psi}{\partial t}+\frac{\partial\Psi}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial t},\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial w}=\frac{\partial\Psi}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial w}$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial w}=\frac{1-|\alpha_m|^2}{(1-\bar{\alpha}_m w)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{(1-\bar{\alpha}_m w)^2}\left\{-(1-\bar{\alpha}_m w)\,\frac{d\alpha_m}{dt}+(w-\alpha_m)w\,\frac{d\bar{\alpha}_m}{dt}\right\}.$$

Подставляя в уравнение (37) найденные выражения частных производных и используя уравнения (44), после простых преобразований получим:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}+\frac{w-\alpha_m}{1-\bar{\alpha}_m w}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\delta_n}{|\mu_n-\alpha_m|^2}\cdot$$

$$\cdot\frac{(\mu_n+\alpha_m-\mu_n^2\bar{\alpha}_m-\mu_n|\alpha_m|^2)+(1+\bar{\mu}_n\alpha_m-\mu_n\bar{\alpha}_m-|\alpha_m|^2)w}{\mu_n-w}\,\frac{\partial\Psi}{\partial u}=0$$

или, заменяя w на u и делая элементарные преобразования, находим:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}+u\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\delta_n}{|\mu_n-\alpha_m|^2}\cdot\frac{1}{1-\bar{\alpha}_m\mu_n}\cdot$$

$$\frac{1}{\dfrac{\mu_n-\alpha_m}{1-\bar{\alpha}_m\mu_n}-u}\,[\mu_n+2\alpha_m-\mu^2_n\bar{\alpha}_m-\bar{\mu}_n\alpha^2_m-\alpha^2_m\bar{\alpha}_m+$$

$$+(2\mu_n\bar{\alpha}_m-\mu^2_n\bar{\alpha}^2_m-\mu_n\alpha_m\alpha^2_m+1-\bar{\mu}_n\alpha_m)u]\,\frac{\partial\Psi}{\partial u}=0.$$

Наконец, учитывая тождество:

$$[(\mu_n+2\alpha_m-\mu^2_n\bar{\alpha}_m-\bar{\mu}_n\alpha^2_m-\alpha^2_m\bar{\alpha}_m)+(2\mu_n\alpha_m-\mu^2_n\bar{\alpha}^2_m-\mu_n\alpha_m\bar{\alpha}^2_m+1-\bar{\mu}_n\alpha_m)u]\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\dfrac{\mu_n-\alpha_m}{1-\bar{\alpha}_m\mu_n}-u}=\mu_n\,\frac{(1-|\alpha_m|^2)^2}{\mu_n-\alpha_m}\,\frac{\dfrac{\mu_n-\alpha_m}{1-\bar{\alpha}_m\mu_n}+u}{\dfrac{\mu_n-\alpha_m}{1-\bar{\alpha}_m\mu_n}-u}$$

$$+\frac{2i\mu_n}{\mu_n-\alpha_m}\,|\mu_n-\alpha_m|^4\,\mathrm{Im}\,\frac{\mu^2_n}{(\mu_n-\alpha_m)^2}$$

получим:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}+u\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n\left\{\frac{(1-|\alpha_m|^2)^2}{|\mu_n-\alpha_m|^4}\,\frac{\varkappa_n+u}{\varkappa_n-u}+2\,i\,Im\frac{\mu^2{}_n}{(\mu_n-\alpha_m)^2}\right\}\frac{\partial\Psi}{\partial u}=0, \quad (52)$$

где

$$\varkappa_n=\frac{\mu_n-\alpha_m}{1-\alpha_m\mu_n}. \quad (53)$$

Произведем теперь в уравнении (52) замену переменных по формулам

$$w_1=e^{i\beta}{}_m u \quad (54)$$

$$\Psi(u,t)=\Phi_1(w_1,t).$$

После такой замены уравнение (52) примет вид

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}+w_1\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n\frac{(1-|\alpha_m|^2)^2}{|\mu_n-\alpha_m|^4}\cdot\frac{e^{i\beta m}\varkappa_n+w_1}{e^{i\beta m}\varkappa_n-w_1}+\right.$$

$$\left.+i\left[\frac{d\beta_m}{dt}+2\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n Im\frac{\mu^2{}_n}{(\mu_n-\alpha_m)^2}\right]\right\}\frac{\partial\Phi_1}{\partial w_1}=0.$$

Но преобразование $S^t{}_m$ круга $|w|<1$ в себя переводит $\mu_n(t)$ в некоторое $\mu_k(t)$, при этом множество точек $[\mu_n(t)]$ переходит в себя, поэтому, учитывая соотношения (38), (39), (52) и дифференциальное уравнение (49), находим:

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}+w_1\sum_{k=0}^{\infty}\delta_k\frac{\mu_k+w_1}{\mu_k-w_1}\,\frac{\partial\Phi_1}{\partial w_1}=0.$$

Это уравнение тождественно с уравнением (37).

Таким образом, инвариантность дифференциального уравнения для функции $\Phi(w,t)$ доказана.

Литература

1. Komatu U. Untersuchungen über konforme Abbildung zweifachzusammenhängender Bereiche, Prec. Phys.-Math. Soc. Japan, 25(1943), 1—42.
2. Голузин Г. М. О параметрическом представлении функций, однолистных в кольце, Матем. сб. 29(1951), 469-476.
3. Komatu U. On conformal slit mapping of multiply-connected domains, Proc. Japan Akad. 26, no. 7, (1950), 26-31.
4. Ли Ен Пир. Некоторые вопросы теории однолистных и типично вещественных функций в круговом кольце, 1953, Ленинград, автореферат диссертации.
5. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного, Гостехиздат, 1952.
6. Форд Л. Р. Автоморфные функции, Гостехиздат.

Кафедра математического анализа
Томского государственного университета
имени В. В. Куйбышева